Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 20

Ein metrischer Raum ist dadurch ausgezeichnet, dass es in ihm eine Abstandsfunktion gibt, und dass dadurch zwei Punkte „näher" zueinander liegen können als zwei andere Punkte. Bei einer Abbildung

$$f : L \longrightarrow M$$

zwischen zwei metrischen Räumen kann man sich fragen, inwiefern der Abstand im Werteraum M durch den Abstand im Definitionsraum L kontrollierbar ist. Sei $x \in L$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x' , die „nahe" an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ nahe an $f(x)$ sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit". Die Frage ist da, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit") mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x, x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Definition 20.1. Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume,

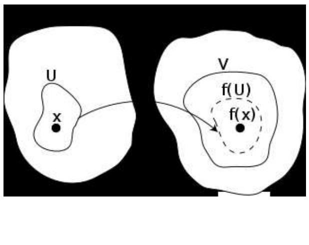
$$f : X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung und $x \in X$. Die Abbildung f heißt *stetig in* x, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f\big(U(x, \delta)\big) \subseteq U\big(f(x), \epsilon\big)$$

gilt. Die Abbildung f heißt *stetig*, wenn sie stetig in x ist für jedes $x \in X$.

Statt mit den offenen Ballumgebungen könnte man hier genauso gut mit den abgeschlossenen Ballumgebungen arbeiten. Die einfachsten Beispiele für stetige Abbildungen sind konstante Abbildungen, die Identität eines metrischen Raumes und die Inklusion $T \subseteq M$ einer mit der induzierten Metrik versehenen Teilmenge eines metrischen Raumes. Siehe dazu die Aufgaben.



Lemma 20.2. *Es sei*

$$f : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M und sei $x \in L$ ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig im Punkt x.*
(2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass aus $d(x,x') \leq \delta$ folgt, dass $d(f(x),f(x')) \leq \epsilon$ ist.*
(3) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar. Sei nun (2) erfüllt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in L, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (2) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta\,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (3) erfüllt und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir nehmen an, dass für alle $\delta > 0$ es Elemente $z \in L$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in L$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenwerte zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (3). □

Satz 20.3. *Es sei*

$$f : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig in jedem Punkt $x \in L$.*
(2) *Für jeden Punkt $x \in L$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass aus $d(x,x') \leq \delta$ folgt, dass $d(f(x),f(x')) \leq \epsilon$ ist.*
(3) *Für jeden Punkt $x \in L$ und jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in L mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*
(4) *Für jede offene Menge $V \subseteq M$ ist auch das Urbild $f^{-1}(V)$ offen.*

Beweis. Die Äquivalenz der ersten drei Formulierungen folgt direkt aus Lemma 20.2. Sei (2) erfüllt und eine offene Menge $V \subseteq M$ gegeben mit dem Urbild $U := f^{-1}(V)$. Sei $x \in U$ ein Punkt mit dem Bildpunkt $y = f(x) \in V$. Da V offen ist, gibt es nach Definition ein $\epsilon > 0$ mit $U(y, \epsilon) \subseteq V$. Nach (2) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U(x, \delta)) \subseteq U(y, \epsilon)$. Daher ist

$$x \in U(x, \delta) \subseteq U$$

und wir haben eine offene Ballumgebung von x innerhalb des Urbilds gefunden. Sei (4) erfüllt und $x \in L$ mit $y = f(x)$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Da der offene Ball $U(y, \epsilon)$ offen ist, ist wegen (4) auch das Urbild $f^{-1}(U(y, \epsilon))$ offen. Da x zu dieser Menge gehört, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(y, \epsilon)),$$

so dass (1) erfüllt ist. □

Lemma 20.4. *Seien L, M, N metrische Räume und seien*

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

stetige Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig.

Beweis. Dies folgt am einfachsten aus der Charakterisierung von stetig mit offenen Mengen, siehe Satz 20.3. □

Verknüpfungen und stetige Abbildungen

Lemma 20.5. *Die Negation*

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto -x,$$

und die Inversenbildung

$$\mathbb{K} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\},\ x \longmapsto x^{-1},$$

sind stetig.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus

$$|-x - (-y)| = |-x + y|.$$

Zur zweiten Aussage sei $x \neq 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Sei $b = |x| > 0$. Wir setzen $\delta = \min(\frac{b^2\epsilon}{2}, \frac{b}{2})$. Dann gilt für jedes y mit $|x - y| \leq \delta$ die Abschätzung (wegen $|y| \geq b/2$)

$$|x^{-1} - y^{-1}| = |\frac{y - x}{xy}| \leq \frac{b^2\epsilon/2}{b^2/2} = \epsilon.$$

□

Lemma 20.6. *Die Addition*

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

sind stetig.

Beweis. Siehe Aufgabe 20.6. □

Lemma 20.7. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien für $i = 1, \ldots, m$ Funktionen*

$$f_i : X \longrightarrow \mathbb{K},$$

gegeben mit der zusammengesetzten Abbildung

$$f : X \longrightarrow \mathbb{K}^m,\ x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Dann ist f genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen f_i stetig sind.

Beweis. Es genügt, diese Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu zeigen. Dafür folgt sie direkt aus Lemma 19.13 unter Verwendung von Lemma 20.2. □

Lemma 20.8. *Seien*

$$f, g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{K}$, auf der g keine Nullstelle besizt, ist auch die Funktion

$$f/g : U \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Wir betrachten Abbildungsdiagramme der Form

$$\mathbb{K} \xrightarrow{f,g} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}\,.$$

Die Abbildung links ist stetig aufgrund von Lemma 20.7. Die rechte Abbildung ist stetig aufgrund von Lemma 20.6. Daher ist wegen Lemma 20.4 auch die Gesamtabbildung stetig. Die Gesamtabbildung ist aber die Addition der beiden Funktionen. Für die Multiplikation verläuft der Beweis gleich, für die Negation und die Division muss man zusätzlich Lemma 20.5 heranziehen und (für die Division) das Diagramm

$$U \xrightarrow{f,g^{-1}} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$$

betrachten. □

Korollar 20.9. *Polynomfunktionen*

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto P(x),$$

sind stetig.

Beweis. Aufgrund von Lemma 20.6 sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto x^n,$$

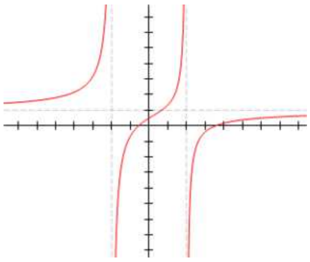
stetig. Daher sind dann auch für jedes $a \in \mathbb{K}$ die Abbildungen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto ax^n,$$

stetig und wiederum aufgrund von Lemma 20.6 sind dann auch alle Funktionen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

stetig. □



Korollar 20.10. *Es seien $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ zwei Polynome und es sei $U = \{x \in \mathbb{K} \vert\, Q(x) \neq 0\}$. Dann ist die rationale Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

stetig.

Beweis. Dies folgt direkt aus Korollar 20.9 und aus Korollar 20.8. □

Satz 20.11. *Es sei $\mathbb{K}^n$ mit der euklidischen Metrik versehen und sei*

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ stetig.

Beweis. Eine komplex-lineare Abbildung ist auch reell-linear, und die euklidische Metrik hängt nur von der reellen Struktur ab. Wir können also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen. Aufgrund von Lemma 20.7 können wir $m = 1$ annehmen. Die Abbildung sei durch

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Nullabbildung ist konstant und daher stetig, also sei $a = \max(\vert a_i \vert, i = 1, \ldots, n) > 0$. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $\epsilon > 0$ vorgegeben.

Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $d(x,y) \leq \frac{\epsilon}{na}$ ist insbesondere $|\, x_i - y_i \,| \leq \frac{\epsilon}{na}$ für alle i und daher ist

$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(y)) &= |\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \,| \\ &= |\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - y_i) \,| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\, a_i (x_i - y_i) \,| \\ &\leq na \,|\, x_i - y_i \,| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Abbildungsverzeichnis