

Einführung in die Algebra**Arbeitsblatt 25****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 1. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Zeige, dass dann auch $K[i]$ ein Unterkörper von \mathbb{C} ist.

AUFGABE 2. Ist die Zahl, die den „goldenen Schnitt“ beschreibt, eine konstruierbare Zahl?

AUFGABE 3. Zeige direkt, ohne Bezug auf Koordinaten, dass die Summe von zwei konstruierbaren komplexen Zahlen wieder konstruierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 4. (2 Punkte)

Sei $Z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl und r eine konstruierbare positive reelle Zahl. Dann ist auch der Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius r konstruierbar.

AUFGABE 5. (3 Punkte)

Es seien P, Q_1, Q_2 drei konstruierbare Punkte derart, dass die Abstände $d(P, Q_1)$ und $d(P, Q_2)$ gleich 1 sind und dass der Winkel zwischen den dadurch definierten Halbgeraden 90 Grad beträgt. Zeige, dass es dann eine affin-lineare Abbildung

$$\varphi : E = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E = \mathbb{R}^2$$

gibt, die 0 auf P , 1 auf Q_1 und i auf Q_2 schickt, und die konstruierbare Punkte in konstruierbare Punkte überführt.

AUFGABE 6. (2 Punkte)

Betrachte ein DinA4-Blatt. Ist das Seitenverhältnis aus langer und kurzer Seitenlänge eine konstruierbare Zahl?

AUFGABE 7. (2 Punkte)

Betrachte die Tastatur eines Klaviers. Ist das Schwingungsverhältnis von zwei nebeneinander liegenden Tasten (bei „gleichstufiger Stimmung“) eine konstruierbare Zahl?

AUFGABE 8. (2 Punkte)

Zeige, dass die komplexe Zahl $re^{i\varphi}$ genau dann konstruierbar ist, wenn r und $e^{i\varphi}$ konstruierbar ist.

AUFGABE 9. (4 Punkte)

Beweise auf zwei verschiedene Arten, dass die komplexe Quadratwurzel einer konstruierbaren komplexen Zahl wieder konstruierbar ist.

AUFGABE 10. (4 Punkte)

Betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] = L.$$

Zeige, dass einerseits $1, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{35}$ und andererseits $(\sqrt{5} + \sqrt{7})^i, i = 0, 1, 2, 3$, eine \mathbb{Q} -Basis von L bildet. Berechne die Übergangsmatrizen für diese Basen.