Fachbereich Mathematik/Informatik **24. Juli 2009**
Prof. Dr. H. Brenner

Einführung in die Algebra

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Hilfsmittel: Erlaubt ist lediglich ein DinA4-Blatt (zweiseitig) mit beliebigem Inhalt. Taschenrechner oder sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Zum Bestehen braucht man 16 Punkte und für eine Eins braucht man 32 Punkte. Es gilt die 1-Punkt-Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe beginnt bei einem Punkt.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und auf jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	3	3	3	6	10	5	3	6	4	3	5	3	2	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Beweise mittels der Division mit Rest, dass jede Untergruppe H von $\mathbb{Z}$ die Gestalt $H = \mathbb{Z}d$ mit einem $d \in \mathbb{N}$ besitzt.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Es seien $n, m \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen. Zeige, dass n genau dann ein Teiler von m ist, wenn es einen Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(m) \longrightarrow \mathbb{Z}/(n)$$

gibt. Zeige durch ein Beispiel, dass es einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(m) \longrightarrow \mathbb{Z}/(n)$$

geben kann, ohne dass n ein Teiler m ist.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

(a) Bestimme für die Zahlen 2, 9 und 25 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in

$$\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(25)$$

die Restetupel $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung x der simultanen Kongruenzen

$$x = 0 \mod 2, x = 3 \mod 9 \text{ und } x = 5 \mod 25\,.$$

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Wie viele Elemente besitzt die von der Drehung um 45 Grad, von der Drehung um 99 Grad und von der Zwölfteldrehung erzeugte Untergruppe der Drehgruppe SO_2?

Aufgabe 5. (3 Punkte)

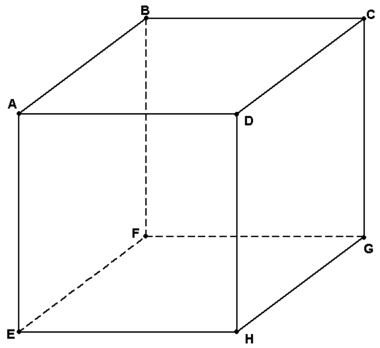
Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$. Charakterisiere mit Hilfe der Multiplikationsabbildung

$$\mu_f : R \longrightarrow R,\ g \longmapsto fg,$$

wann f ein Nichtnullteiler und wann f eine Einheit ist.

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Betrachte den Würfel



Es sei α diejenige Drehung am Würfel um die Achse durch die Eckpunkte A und G, die den Eckpunkt B auf D schickt, und es sei β die Halbdrehung um die vertikale Achse (also die Gerade, die durch den Mittelpunkt der Seitenfläche A, B, C, D und den Mittelpunkt der Seitenfläche E, F, G, H läuft).

a) Man gebe eine Wertetabelle für die Permutationen auf der Eckpunktmenge $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, die durch $\alpha, \beta, \alpha\beta$ und $\beta\alpha$ bewirkt werden.

b) Bestimme die Drehachsen von $\alpha\beta$ und von $\beta\alpha$ sowie die Ordnung dieser Drehungen.

c) Man gebe die Zykeldarstellung der von α^2 bewirkten Permutation auf der Eckpunktmenge an. Was ist α^{1001}?

d) Man betrachte die Permutation σ, die auf der Eckpunktmenge durch die Wertetabelle

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$\sigma(x)$	B	C	D	A	G	H	E	F

gegeben ist. Gibt es eine Drehung des Würfels, die diese Permutation bewirkt? Berechne das Signum von σ.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Defintion.

Ein kommutativer Ring R heißt *angeordnet*, wenn es eine *totale Ordnung* „$\geq$“ auf R gibt, die die beiden Eigenschaften

(1) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ für beliebige $a, b, c \in R$.
(2) Aus $a \geq b$ folgt $ac \geq bc$ für beliebige $a, b, c \in R$ mit $c \geq 0$.

erfüllt.

Die Schreibweise $a > b$ bedeutet $a \geq b$ und $a \neq b$. Die Schreibweise $a \leq b$ bedeutet $b \geq a$.

Aufgabe 7. (10 Punkte)

Es sei R ein angeordneter Integritätsbereich.

a) Zeige, dass aus $ca \geq cb$ mit $c > 0$ folgt, dass $a \geq b$ ist.

b) Zeige, dass $1 > 0$ gilt in R.

c) Zeige, dass aus $a < 0$ die Eigenschaft $-a > 0$ folgt.

d) Es sei $K = Q(R)$ der Quotientenkörper von R. Definiere eine Ordnungsrelation $\geq$ auf K, die auf $R \subseteq K$ mit der vorgegebenen Ordnung übereinstimmt, und die K zu einem angeordneten Körper macht (Tipp: es empfiehlt sich, die Nenner positiv anzusetzen).

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Bestimme die Primfaktorzerlegung des Polynoms $X^6 - 1$ über den Körpern $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(7)$ und $\mathbb{Z}/(5)$.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Betrachte den Körper $K = \mathbb{F}_4 = (\mathbb{Z}/(2))[U]/(U^2 + U + 1)$. Führe im Polynomring $K[X]$ die Polynomdivision

$$X^4 + uX^3 + (u + 1)X + 1 \text{ durch } uX^2 + X + u + 1$$

aus, wobei u die Restklasse von U in K bezeichnet.

Aufgabe 10. (6 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper der Charakteristik ungleich 2. Zeige unter Verwendung der Isomorphiesätze, dass genau die Hälfte der Elemente aus $\mathbb{F}_q^\times$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$ ist.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Beschreibe den Körper mit neun Elementen $\mathbb{F}_9$ als einen Restklassenkörper von $\mathbb{Z}/(3)[X]$. Man gebe eine primitive Einheit in $\mathbb{F}_9$ an.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Schreibe den Restklassenring $\mathbb{Q}[X]/(X^4 - 1)$ als ein Produkt von Körpern, wobei lediglich die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}[i]$ vorkommen. Schreibe die Restklasse von $X^3 + X$ als ein Tupel in dieser Produktzerlegung.

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Formuliere und beweise die „Gradformel" für eine Folge von endlichen Körpererweiterungen $K \subseteq L \subseteq M$.

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Es seien zwei verschiedene Punkte M, P in der Ebene gegeben. Es bezeichne K den Kreis mit Mittelpunkt M durch den Punkt P. Konstruiere (ohne andere Konstruktionen zu verwenden) die Tangente an den Kreis K durch P. Skizziere die Situation.

Aufgabe 15. (2 Punkte)

Charakterisiere mit Hilfe von Fermatschen Primzahlen (ohne Beweis) diejenigen natürlichen Zahlen n, für die das reguläre n-Eck konstruierbar ist. Wende diese Charakterisierung für n zwischen 30 und 40 an.