

Algebraische Kurven - Vorlesung 13

Die offenen Mengen $D(f)$

Wir wollen zeigen, dass die Zariski-offenen Teilmengen $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$ selbst homöomorph zum K -Spektrum einer endlich erzeugten K -Algebra sind. Dazu benötigen wir den Begriff des multiplikativen Systems und der Nenneraufnahme.

Definition 1. Sei R ein kommutativer Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt *multiplikatives System*, wenn die beiden Eigenschaften

- (1) $1 \in S$
- (2) Wenn $f, g \in S$, dann ist auch $fg \in S$

gelten.

Beispiel 2. Sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ ein Element. Dann bilden die Potenzen f^n , $n \in \mathbb{N}$, ein multiplikatives System.

Definition 3. Sei R ein Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System, $0 \notin S$. Dann nennt man den Unterring

$$R_S := \left\{ \frac{f}{g} : f \in R, g \in S \right\} \subseteq Q(R)$$

die *Nenneraufnahme* zu S .

Für die Nenneraufnahme an einem Element f schreibt man einfach R_f statt $R_{\{f^n : n \in \mathbb{N}\}}$. Für den Begriff der Nenneraufnahme für beliebige kommutative Ringe, siehe Aufgabe 13.2.

Satz 4. Sei K ein Körper und sei R eine endlich erzeugte K -Algebra, $f \in R$. Dann ist die Zariski-offene Menge $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$ in natürlicher Weise isomorph zu $K - \text{Spek}(R_f)$.

Beweis. Wir betrachten die zum K -Algebra-Homomorphismus $\varphi : R \rightarrow R_f$ gehörende natürliche Abbildung

$$\varphi^* : K - \text{Spek}(R_f) \longrightarrow K - \text{Spek}(R), P \longmapsto P \circ \varphi,$$

die nach Satz 12.7 stetig ist. Es ist $f(P \circ \varphi) = P(\varphi(f)) \neq 0$, da ja f in R_f eine Einheit wird. Daher liegt das Bild von φ^* in $D(f)$. Sei $Q \in D(f)$ irgendein Punkt, d.h. Q ist ein K -Algebra-Homomorphismus $Q : R \rightarrow K$ mit $Q(f) \neq 0$. Dann ist $Q(f)$ eine Einheit und daher faktorisiert dieser Homomorphismus nach der universellen Eigenschaft der Nenneraufnahme (siehe Aufgabe 13.5) durch R_f . Dieser Morphismus ist das gesuchte Urbild und daher ist φ^* surjektiv.

Zur Injektivität seien zwei K -Algebra-Homomorphismen $P_1, P_2 : R_f \rightarrow K$ gegeben, deren Verknüpfung mit $R \rightarrow R_f$ übereinstimmen. Wegen

$$P_1\left(\frac{r}{f^s}\right) = P_1(rf^{-s}) = P_1(r)P_1(f^s)^{-1}$$

und ebenso für P_2 ist dann aber $P_1 = P_2$.

Zur Homöomorphie ist lediglich zu beachten, dass die Zariski-offenen Mengen von $K - \text{Spek}(R_f)$ überdeckt werden von $D(g)$, $g \in R_f$. Dabei kann man $g \in R$ annehmen, da f eine Einheit in R_f ist. Dann ist aber dieses $D(g)$ gleich $(\varphi^*)^{-1}(D(gf))$, wo letzteres $D(gf)$ die offene Menge in $K - \text{Spek}(R)$ bezeichnet. \square

Bemerkung 5. Die Aussage 13.4 besagt insbesondere, dass eine offene Menge $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$ selbst das K -Spektrum einer endlich erzeugten K -Algebra ist (nämlich von R_f , das über R von $1/f$ erzeugt wird), und sich daher auch als Zariski-abgeschlossene Menge eines affinen Raumes realisieren lassen muss. Aus $R_f \cong R[T]/(Tf - 1)$ (siehe Aufgabe 13.6) erhält man eine solche Realisierung. Sei $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$. Dann liefert der surjektive Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} K[X_1, \dots, X_n, T] &\longrightarrow (K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a})[T] \\ &\longrightarrow ((K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a})[T])/(Tf - 1) \cong R_f \end{aligned}$$

eine abgeschlossene Einbettung von $D(f)$ in \mathbb{A}_K^{n+1} . Ist ψ die Gesamtinklusion

$$D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R) \subseteq \mathbb{A}_K^n,$$

so kann man die abgeschlossene Einbettung auch als

$$\psi \times \frac{1}{f} : D(f) \longrightarrow \mathbb{A}_K^n \times \mathbb{A}_K^1$$

auffassen, wobei hier wieder das Produkt von Varietäten auftritt.

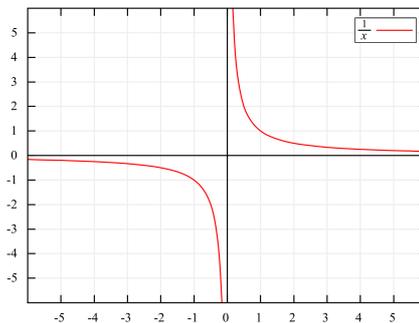
Beispiel 6. Betrachten wir in Anschluss an Bemerkung 13.5 die punktierte affine Gerade, also die offene Menge

$$D(X) = \{P \in \mathbb{A}_K^1 : P \neq 0\} \subset \mathbb{A}_K^1.$$

Diese offene Menge nennt man die *punktierte affine Gerade*. Auf dieser offenen Menge ist X invertierbar, d.h. die rationale Funktion $\frac{1}{X}$ ist darauf definiert. Diese Abbildung liefert zusammen mit der gegebenen (offenen) Inklusion $D(X) \subset \mathbb{A}_K^1$ die abgeschlossene Inklusion

$$D(X) \longrightarrow V(XY - 1) \subset \mathbb{A}_K^2, x \longmapsto \left(x, \frac{1}{x}\right),$$

dessen Bild eine (in der affinen Ebene abgeschlossene) Hyperbel ist. Die punktierte affine Gerade und die Hyperbel sind also homöomorph (und die zugehörigen Ringe, nämlich $K[X]_X = K[X, X^{-1}]$ und $K[X, Y]/(XY - 1)$, sind isomorph.



Zusammenhang und idempotente Elemente

Wir interessieren uns dafür, wie es sich auf den Koordinatenring auswirkt, wenn eine affin-algebraische Menge zusammenhängend ist, und wie sich gegebenenfalls die Zusammenhangskomponenten charakterisieren lassen. Wir beginnen mit einem Beispiel, das zeigt, dass über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper keine überzeugende Theorie zu erwarten ist.

Beispiel 7. Wir betrachten wie in Beispiel 11.8 die beiden algebraischen Kurven

$$V_1 = V(X^2 + Y^2 - 2) \text{ und } V_2 = V(X^2 + 2Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_K^2.$$

Der Durchschnitt wird beschrieben durch das Ideal

$$(X^2 + Y^2 - 2, X^2 + 2Y^2 - 1) = (Y^2 + 1, X^2 - 3).$$

Sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ leer.

Die affin-algebraische Menge $V = V_1 \cup V_2$ ist nicht zusammenhängend (V_1 und V_2 sind die irreduziblen Komponenten und die Zusammenhangskomponenten). Der Koordinatenring von V ist

$$\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 2)(X^2 + 2Y^2 - 1).$$

Man könnte erwarten, dass die Funktion auf V , die auf V_1 konstant gleich 1 und auf V_2 konstant gleich 0 ist, sich im Koordinatenring wiederfindet. Dies ist aber nicht der Fall, und zwar liegt das daran, dass über den komplexen Zahlen $V_{\mathbb{C}}$ zusammenhängend ist. Daher besitzt der komplexe Koordinatenring nur die trivialen idempotenten Elemente, und das überträgt sich auf den reellen Koordinatenring von.

Definition 8. Ein Element e eines kommutativen Ringes heißt *idempotent*, wenn $e^2 = e$ gilt.

Definition 9. Seien R_1, \dots, R_n kommutative Ringe. Dann heißt das Produkt

$$R_1 \times \cdots \times R_n,$$

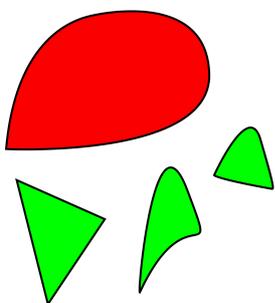
versehen mit komponentenweiser Addition und Multiplikation, der *Produkttring* der R_i , $i = 1, \dots, n$.

In einem Produktring gibt es viele idempotente Elemente, nämlich solche Elemente, deren Komponenten null oder eins sind.

Definition 10. Ein kommutativer Ring R heißt *zusammenhängend*, wenn er genau zwei idempotente Elemente (nämlich $0 \neq 1$) enthält.

Definition 11. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es in X genau zwei Teilmengen gibt (nämlich \emptyset und der Gesamttraum X), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Die leere Menge und der Gesamttraum sind stets zugleich offen und abgeschlossen. Solche Mengen nennt man auch *randlos* oder *clopen*. Der leere topologische Raum gilt nicht als zusammenhängend, da es in ihm nur eine zugleich offene und abgeschlossene Menge gibt.



Ein zusammenhängender topologischer Raum (rot) und ein nicht zusammenhängender Raum (grün).

Lemma 12. Sei K ein Körper und seien R_1 und R_2 endlich erzeugte K -Algebren mit dem Produktring $R = R_1 \times R_2$. Dann gibt es eine natürliche Homöomorphie

$$K - \text{Spek}(R_1 \times R_2) \cong K - \text{Spek}(R_1) \uplus K - \text{Spek}(R_2).$$

Dabei werden die Einbettungen von rechts nach links durch die Projektionen $R \rightarrow R_i$, $i = 1, 2$, induziert.

Beweis. Die Projektion $R_1 \times R_2 \rightarrow R_1$ ist ein K -Algebra-Homomorphismus und liefert daher (nach Proposition 12.8 (3)) eine stetige Abbildung (und zwar eine abgeschlossene Einbettung)

$$K - \text{Spek}(R_1) \longrightarrow K - \text{Spek}(R_1 \times R_2).$$

Ebenso gibt es eine Abbildung auf $K - \text{Spek}(R_2)$. Diese zusammengenommen definieren eine stetige Abbildung

$$K - \text{Spek}(R_1) \uplus K - \text{Spek}(R_2) \longrightarrow K - \text{Spek}(R_1 \times R_2).$$

Sei $P \in K - \text{Spek}(R_1 \times R_2)$, also $P : R_1 \times R_2 \rightarrow K$ sei ein K -Algebra-Homomorphismus. Seien $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ die zur Produktzerlegung gehörenden idempotenten Elemente. Wegen $e_1 + e_2 = 1$ und $e_1 e_2 = 0$ wird genau eines dieser Elemente (sagen wir e_1) unter P auf null abgebildet (das andere auf 1). Dann wird aber $R_1 \times 0$ auf null geschickt und P faktorisiert durch eine Projektion. Das beweist die Surjektivität.

Zur Injektivität seien P_1, P_2 in der disjunkten Vereinigung gegeben, $P_1 \neq P_2$. Wenn sie beide in einem der Teilstücke liegen, so bleiben sie unter der Abbildung verschieden, da auf den Teilstücken eine abgeschlossene Einbettung vorliegt. Wenn sie auf verschiedenen Teilstücken liegen, so faktorisieren sie durch die zwei verschiedenen Projektionen und für den einen Punkt ist $P_1(e_1) = 0$ und für den anderen Punkt $P_2(e_1) = 1$. Sie sind also verschieden als Elemente in $K - \text{Spek}(R_1 \times R_2)$.

Eine Homöomorphie liegt vor, da sich die einzelnen abgeschlossenen Einbettungen zu einer abgeschlossenen Abbildung zusammensetzen. \square

Satz 13. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine reduzierte kommutative K -Algebra von endlichem Typ. Dann stiftet die Abbildung*

$$e \longmapsto D(e)$$

eine Bijektion zwischen den idempotenten Elementen in R und denjenigen Teilmengen aus $K - \text{Spek}(R)$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Beweis. Zunächst ist $D(e) = V(1 - e)$ offen und abgeschlossen. Dies folgt aus

$$D(e) \cup D(1 - e) = D(1) = K - \text{Spek}(R)$$

und aus

$$D(e) \cap D(1 - e) = D(e(1 - e)) = D(e - e^2) = D(0) = \emptyset.$$

D.h. die Abbildung ist wohldefiniert. Seien e_1, e_2 zwei idempotente Elemente mit $U = D(e_1) = D(e_2)$. Da ein idempotentes Element in einem Körper nur die Werte null oder eins annehmen kann, haben sowohl e_1 als auch e_2 auf U den Wert 1 und außerhalb den Wert 0. Damit haben e_1 und e_2 überall den gleichen Wert und sind nach dem Identitätssatz für Polynome (siehe Aufgabe 13.1) überhaupt gleich. Dies beweist die Injektivität.

Sei nun $U = D(\mathfrak{a})$ sowohl offen als auch abgeschlossen. D.h. es gibt ein weiteres Ideal \mathfrak{b} mit

$$D(\mathfrak{a}) \cup D(\mathfrak{b}) = K - \text{Spek}(R) \text{ und } D(\mathfrak{a}) \cap D(\mathfrak{b}) = \emptyset.$$

Nach Korollar 11.5 erzeugen \mathfrak{a} und \mathfrak{b} zusammen das Einheitsideal. D.h. es gibt $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ mit $a + b = 1$. Wegen $D(a) \cap D(b) = D(ab) = \emptyset$ ist nach Aufgabe 13.1 das Element ab nilpotent und wegen der Reduziertheit ist $ab = 0$. Also ist

$$a = a \cdot 1 = a(a + b) = a^2 + ab = a^2$$

idempotent und $U = D(a)$. \square

Es folgt, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper eine (reduzierte) K -Algebra R von endlichem Typ genau dann zusammenhängend ist, wenn das zugehörige $K - \text{Spek}(R)$ zusammenhängend ist.