Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 7

Aufwärmaufgaben

In den meisten der folgenden Aufgaben kann man statt mit einem Grundkörper mit einem beliebigen kommutativen Grundring arbeiten.

Aufgabe 7.1. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative K-Algebra. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der K-Vektorraum

$$\oplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterring von A ist.

Aufgabe 7.2. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative K-Algebra, die ein Integritätsbereich sei. Zeige, dass die Menge

$$M = \{d \in D |\, A_d \neq 0\}$$

ein Untermonoid von D ist.

Vor der nächsten Aufgabe erwähnen wir die folgende Definition.

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Ein K-Automorphismus

$$\varphi \colon A \longrightarrow A$$

heißt *homogen*, wenn für jedes homogene Element $a \in A_d$ gilt $\varphi(a) \in A_d$.

Aufgabe 7.3. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative K-Algebra. Zeige, dass der in Lemma 7.9 zu einem Charakter $\chi \in D^\vee$ eingeführte Automorphismus

$$\varphi_\chi \colon A \longrightarrow A$$

homogen ist.

Aufgabe 7.4. Es sei D eine kommutative Gruppe und R ein kommutativer D-graduierter Ring. Es sei

$$\pi \colon D \longrightarrow E$$

ein Gruppenhomorphismus mit $F = \text{kern } \pi$. Zeige folgende Aussagen.

(1) R ist in natürlicher Weise E-graduiert.
(2) Die Operation von $E^\vee$ auf R im Sinne von Lemma 7.9 stimmt mit der Operation via
$$\pi^\vee \colon E^\vee \longrightarrow D^\vee$$
überein.
(3) Die neutrale Stufe von R bezüglich der E-Graduierung ist $\bigoplus_{d \in F} R_d$. Dieser Ring ist F-graduiert und seine neutrale Stufe stimmt mit der neutralen Stufe von R in der D-Graduierung überein.
(4) Vergleiche die letzte Aussage mit Proposition 5.1.

Aufgabe 7.5. Beschreibe im Sinne von Aufgabe 7.4, wie auf dem Polynomring $R[X_1, \ldots, X_n]$ (R ein kommutativer Ring) die feine Graduierung mit der Standardgraduierung zusammenhängt.

Aufgabe 7.6. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass es auf dem Polynomring $K[V]$ keine kanonische feine Graduierung gibt.

Aufgabe 7.7. Es sei R ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative R-Algebra. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein homogenes Ideal. Zeige, dass der Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ ebenfalls D-graduiert ist.

Aufgabe 7.8. Wir betrachten die Gruppenoperation
$$\mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (u,x,y) \longmapsto (ux, u^{-1}y).$$
Bestimme die Bahnen der Operation. Ist der Quotient (versehen mit der Bildtopologie) ein Hausdorff-Raum?

Aufgabe 7.9. Es sei R ein Integritätsbereich mit $2 \neq 0$ und $r \in R$ ein Element, das keine Quadratwurzel in R besitze. Zeige, dass das Polynom $X^2 - r \in R[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 7.10. Es sei G die Menge der stetigen geraden Funktionen und U die Menge der stetigen ungeraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass
$$\mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = G \oplus U$$
eine $\mathbb{Z}/(2)$-graduierte $\mathbb{R}$-Algebra ist.

Aufgabe 7.11. Es sei R ein kommutativer Ring mit $2 \in R^{\times}$, auf dem die Gruppe $\mathbb{Z}/(2)$ als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass man R mit einer $\mathbb{Z}/(2)$-Graduierung versehen kann derart, dass die neutrale Stufe der Invariantenring ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.12. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative K-Algebra. Es sei

$$\varphi\colon A \longrightarrow A$$

ein homogener Automorphismus. Zeige, dass es einen Charakter $\chi \in D^{\vee}$ gibt mit $\varphi = \varphi_\chi$, wobei φ_χ der gemäß Lemma 7.9 zu χ gehörige Automorphismus ist.

Aufgabe 7.13. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und

$$\delta\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Bestimme die neutrale Stufe von $K[X,Y]$ zur Graduierung, die durch $\operatorname{grad}(X_1) = \delta(e_1)$ und $\operatorname{grad}(X_2) = \delta(e_2)$ gegeben ist.

Aufgabe 7.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und R eine kommutative D-graduierte K-Algebra. Es sei $G = D^{\vee}$ mit der natürlichen Operation auf R. Zeige, dass $d \in D$ einen Charakter λ auf G definiert derart, dass (unter geeigneten Voraussetzungen an D und K) die Menge der Semiinvarianten bezüglich λ gerade die d-te Stufe der Graduierung ist.

Aufgabe 7.15. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Polynom

$$XY - Z^n$$

irreduzibel ist.