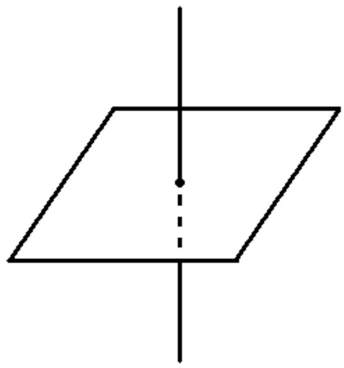
Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück SS 2012

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 8

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 8.1. Finde ein Ideal, dessen Nullstellenmenge das folgende Gebilde ist.



Aufgabe 8.2. Sei $\varphi : \mathbb{A}_K^2 \to \mathbb{A}_K^2$ eine polynomiale Abbildung und sei C eine ebene rationale Kurve. Es sei ferner vorausgesetzt, dass C durch φ nicht auf einen einzigen Punkt abgebildet wird. Zeige, dass dann $\overline{\varphi(C)}$ ebenfalls eine rationale Kurve ist.

Aufgabe 8.3. Zeige, dass eine ebene algebraische Kurve über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ nicht kompakt in der metrischen Topologie ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.4. (6 Punkte)

Es sei $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ der Schnitt von zwei Zylindern mit Radius eins (C ist also die Vereinigung von zwei Ellipsen). Wir betrachten die durch einen Vektor $v = (a, b, c) \neq 0$ definierte senkrechte Projektion

$$p_v : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 .$$

Man charakterisiere, in Abhängigkeit von a, b, c, die möglichen Bilder unter diesen Projektionen.

Aufgabe 8.5. (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung
$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K\,, (x, y) \longrightarrow (x^2, y^2) = (u, v)\,.$$
Wie sieht das Bild der Ebene und wie das Bild des Einheitskreises unter dieser Abbildung für $K = \mathbb{R}$ und wie für $K = \mathbb{C}$ aus? Im reellen Fall, wenn der Kreis einmal durchlaufen wird, wie oft wird das Bild durchlaufen?

Aufgabe 8.6. (4 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{A}^r_K \to \mathbb{A}^n_K$ eine polynomiale Abbildung und sei $T \subseteq \mathbb{A}^r$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Gleichheit
$$\overline{\varphi(T)} = \overline{\varphi(\overline{T})}$$
gilt.

Aufgabe 8.7. (3 Punkte)

Zeige, dass die Aussage von Aufgabe 8.6 nicht gilt ohne die Voraussetzung, dass die Abbildung polynomial ist.

Aufgabe 8.8. (6 Punkte)

Betrachte in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ die beiden Nullstellenmengen
$$K = V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } C = V(X^4 + Y^4 - 1)\,.$$
Zeige, dass es eine polynomiale Abbildung in zwei Variablen gibt, die die eine Nullstellenmenge surjektiv auf die andere abbildet. Zeige, dass diese Abbildung schon über $\mathbb{Q}$ definiert ist, dort aber nicht surjektiv ist. Zeige ferner, dass es über $\mathbb{Q}$ überhaupt keine surjektive polynomiale Abbildung von C nach K geben kann und dass es nur die konstanten polynomialen Abbildungen von K nach C gibt.

Aufgabe 8.9. (4 Punkte)

Zeige, dass die affine Ebene $\mathbb{A}^2_K$ mit der Zariski-Topologie kompakt ist.

Aufgabe 8.10. (10 Punkte)

Schreibe eine Computeranimation, die die Stangenkonfiguration bzw. die zugehörigen Trajektorien aus Beispiel 8.5 darstellt.