

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 12

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 12.1. Man beschreibe zu einer kommutativen K -Algebra R von endlichem Typ die Spektrumsabbildung, die zum Strukturhomomorphismus der Algebra gehört.

AUFGABE 12.2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass die Punkte aus K - $\text{Spek}(R)$ den maximalen Idealen in R entsprechen.

AUFGABE 12.3. Sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ in K - $\text{Spek}(R)$ die Gleichheit

$$V(\mathfrak{a}) = V(\text{rad}(\mathfrak{a}))$$

gilt.

AUFGABE 12.4. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem K -Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen K -Algebra R wirklich eine Topologie ist.

AUFGABE 12.5. Seien R, S, T drei kommutative K -Algebren von endlichem Typ und $\varphi : R \rightarrow S$ und $\psi : S \rightarrow T$ seien K -Algebra-Homomorphismen. Man zeige, dass für die zugehörigen Spektrumsabbildungen

$$(\psi \circ \varphi)^* = (\varphi^*) \circ (\psi^*)$$

gilt. Ferner zeige man, dass zur Identität $\text{id} : R \rightarrow R$ auch id^* die Identität ist.

AUFGABE 12.6. Man gebe ein Beispiel von zwei kommutativen K -Algebren R, S von endlichem Typ und einer stetigen Abbildung zwischen den zugehörigen K -Spektren, die nicht von einem K -Algebra-Homomorphismus herrühren kann.

AUFGABE 12.7. Sei K ein Körper und R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* : K - \text{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabbildung. Zeige, dass

$$(\varphi^*)^{-1}(0) = V(F)$$

ist.

AUFGABE 12.8. Sei K ein Körper und sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ mit der Reduktion $S = R_{\text{red}}$. Zeige, dass es eine natürliche Homöomorphie

$$K - \text{Spek}(R) \cong K - \text{Spek}(S)$$

gibt.

AUFGABE 12.9.*

Sei K ein Körper und $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine endlich erzeugte K -Algebra. Stifte eine Bijektion zwischen

$$K - \text{Spek}(R) \text{ und } V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n.$$

AUFGABE 12.10.*

Sei K ein Körper, R eine endlich erzeugte K -Algebra, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und sei $X = K - \text{Spek}(R)$. In welcher Beziehung stehen die beiden Aussagen

$$V(\mathfrak{a}) = \emptyset \text{ und } \mathfrak{a} \text{ ist das Einheitsideal}$$

und die beiden Aussagen

$$V(\mathfrak{a}) = X \text{ und } \mathfrak{a} \text{ ist nilpotent}$$

zueinander. Zeige, dass die Antwort davon abhängt, ob K algebraisch abgeschlossen ist oder nicht.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 12.11. (3 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* : K - \text{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabbildung. Zeige, dass F konstant ist genau dann, wenn φ^* konstant ist.

Man mache sich dabei auch die unterschiedlichen Bedeutungen von „konstant“ klar.

AUFGABE 12.12. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei integren K -Algebren von endlichem Typ R und S und einem K -Algebra-Homomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$, der kein Ringisomorphismus ist, wo aber die induzierte Spektrumsabbildung $\varphi^* : K - \text{Spek}(S) \rightarrow K - \text{Spek}(R)$ ein Homöomorphismus ist.

AUFGABE 12.13. (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeige, dass sich jedes Element aus R als ein Produkt von irreduziblen Elementen schreiben lässt.

AUFGABE 12.14. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik null. Es sei eine polynomiale Abbildung der Form

$$\varphi : \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, t \longmapsto (t^2, \psi(t)),$$

gegeben (mit $\psi(t) \in K[t]$) Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn ψ die Form hat

$$\psi(t) = at^n + \theta(t)$$

mit $a \neq 0$, n ungerade und $\theta(t)$ ein Polynom, in dem nur geradzahlige Exponenten auftreten.