Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 4

Aufgabe 4.1. Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Verknüpfung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist f auch injektiv.

Aufgabe 4.2. Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Verknüpfung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Zeige durch Beispiele, dass bei den beiden vorhergehenden Aufgaben die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 4.3. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \operatorname{Abb}(N, L)).$$

Man mache sich diese Situation für $M = N = [0, 1]$ und $L = \mathbb{R}$ klar.

Aufgabe 4.4. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M, N \times L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, N) \times \operatorname{Abb}(M, L).$$

Aufgabe 4.5. Es sei M eine Menge und $a, b \in M$ zwei verschiedene Elemente. Definiere eine Bijektion von M nach M, die a und b vertauscht, und sonst alle Elemente unverändert lässt. (Eine solche Abbildung heißt *Transposition*).

Aufgabe 4.6. Wie kann man sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und wie sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

vorstellen?

Aufgabe 4.7. Skizziere den Graph der reellen Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graph der reellen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

Aufgabe 4.8. Es seien L und M Mengen und es sei

$$f : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung mit dem Graph $\Gamma_f \subseteq L \times M$. Zeige, dass die Abbildung

$$\psi = \operatorname{id} \times f : M \longrightarrow L \times M,\ x \longmapsto (x, f(x)),$$

eine Bijektion zwischen L und dem Graphen Γ_f induziert. Was ist die Verknüpfung von ψ mit der zweiten Projektion

$$L \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto y?$$

Aufgabe 4.9. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 4.10. Sei M eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \{0, 1\}).$$

Aufgabe 4.11. Sei M eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$M = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen den Potenzmengen,

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B).$$

Wie verhalten sich diese beiden Mengen, wenn A und B zwar eine Vereinigung von M ergeben, aber nicht disjunkt sind, und umgekehrt.

Aufgabe 4.12. Es sei
$$F : L \longrightarrow M$$
eine Abbildung. Zeige, dass das Urbildnehmen
$$\mathfrak{P}\,(M) \longrightarrow \mathfrak{P}\,(L),\ T \longmapsto F^{-1}(T),$$
folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $T, T_1, T_2 \subseteq M$):

(1) $F^{-1}(T_1 \cap T_2) = F^{-1}(T_1) \cap F^{-1}(T_2)$,
(2) $F^{-1}(T_1 \cup T_2) = F^{-1}(T_1) \cup F^{-1}(T_2)$,
(3) $F^{-1}(M \setminus T) = L \setminus F^{-1}(T)$.

Aufgabe 4.13. Es sei
$$F : L \longrightarrow M$$
eine Abbildung. Zeige, dass das Bildnehmen
$$\mathfrak{P}\,(L) \longrightarrow \mathfrak{P}\,(M),\ S \longmapsto F(S),$$
folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $S, S_1, S_2 \subseteq L$):

(1) $F(S_1 \cap S_2) \subseteq F(S_1) \cap F(S_2)$,
(2) $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) \cup F(S_2)$,
(3) $F(L \setminus S) \supseteq F(M) \setminus F(S)$.

Zeige durch Beispiele, dass die beiden Inklusionen in (1) und (3) echt sein können.