

# Mathematik für Anwender I

## Vorlesung 9

### Lineare Abbildungen

DEFINITION 9.1. Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ . Eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- (1)  $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$  für alle  $u, v \in V$ .
- (2)  $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$  für alle  $\lambda \in K$  und  $v \in V$ .

Die erste Eigenschaft nennt man dabei die *Additivität* und die zweite Eigenschaft die *Verträglichkeit mit Skalierung*. Wenn man den Grundkörper betonen möchte spricht man von  $K$ -Linearität. Lineare Abbildungen heißen auch *Homomorphismen* von Vektorräumen. Die Identität  $\text{Id}_V : V \rightarrow V$ , die Nullabbildung  $V \rightarrow 0$  und die Inklusionen  $U \subseteq V$  von Untervektorräumen sind die einfachsten Beispiele für lineare Abbildungen.

BEISPIEL 9.2. Es sei  $K$  ein Körper und sei  $K^n$  der  $n$ -dimensionale Standardraum. Dann ist die  $i$ -te *Projektion*, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K, (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \longmapsto a_i,$$

eine  $K$ -lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die  $i$ -te Projektion heißt auch die  $i$ -te *Koordinatenfunktion*.

Die folgende Aussage bestätigt erneut das Prinzip, dass in der linearen Algebra (von endlichdimensionalen Vektorräumen) die Objekte durch endlich viele Daten bestimmt sind.

SATZ 9.3. *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ . Es sei  $v_i, i \in I$ , eine endliche Basis von  $V$  und es seien  $w_i, i \in I$ , Elemente in  $W$ . Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$f : V \longrightarrow W$$

mit

$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I.$$

*Beweis.* Da  $f(v_i) = w_i$  sein soll und eine lineare Abbildung für jede Linearkombination die Eigenschaft

$$f\left(\sum_{i \in I} a_i v_i\right) = \sum_{i \in I} a_i f(v_i)$$

erfüllt, und jeder Vektor  $v \in V$  sich als eine solche Linearkombination schreiben lässt, kann es maximal nur eine solche lineare Abbildung geben. Wir definieren nun umgekehrt eine Abbildung

$$f : V \longrightarrow W,$$

indem wir jeden Vektor  $v \in V$  mit der gegebenen Basis als

$$v = \sum_{i \in I} a_i v_i$$

schreiben und

$$f(v) := \sum_{i \in I} a_i w_i$$

ansetzen. Da die Darstellung von  $v$  als eine solche Linearkombination eindeutig ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Linearität. Für zwei Vektoren  $u = \sum_{i \in I} a_i v_i$  und  $v = \sum_{i \in I} b_i v_i$  gilt

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f\left(\left(\sum_{i \in I} a_i v_i\right) + \left(\sum_{i \in I} b_i v_i\right)\right) \\ &= f\left(\sum_{i \in I} (a_i + b_i) v_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} (a_i + b_i) f(v_i) \\ &= \sum_{i \in I} a_i f(v_i) + \sum_{i \in I} b_i f(v_i) \\ &= f\left(\sum_{i \in I} a_i v_i\right) + f\left(\sum_{i \in I} b_i v_i\right) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ergibt sich ähnlich.  $\square$

LEMMA 9.4. *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $U, V, W$  Vektorräume über  $K$ . Es seien*

$$\varphi : U \rightarrow V \text{ und } \psi : V \rightarrow W$$

*lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung*

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe \*\*\*\*\*.

$\square$

LEMMA 9.5. *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine  $K$ -lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Für einen Untervektorraum  $S \subseteq V$  ist auch das Bild  $\varphi(S) = \{\varphi(v) \mid v \in S\}$  ein Unterraum von  $W$ .*
- (2) *Insbesondere ist das Bild  $\text{bild } \varphi = \varphi(V)$  der Abbildung ein Unterraum von  $W$ .*
- (3) *Für einen Unterraum  $T \subseteq W$  ist das Urbild  $\varphi^{-1}(T)$  ein Unterraum von  $V$ .*
- (4) *Insbesondere ist  $\varphi^{-1}(0)$  ein Unterraum von  $V$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe \*\*\*\*\*. □

DEFINITION 9.6. *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine  $K$ -lineare Abbildung. Dann nennt man*

$$\text{kern } \varphi := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

*den Kern von  $\varphi$ .*

Der Kern ist also nach der obigen Aussage ein Untervektorraum.

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium*.

LEMMA 9.7. *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine  $K$ -lineare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  injektiv genau dann, wenn  $\text{kern } \varphi = 0$  ist.*

*Beweis.* Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben  $0 \in V$  keinen anderen Vektor  $v \in V$  mit  $\varphi(v) = 0$  geben. Also ist  $\varphi^{-1}(0) = 0$ . Sei umgekehrt  $\text{kern } \varphi = 0$  und seien  $v_1, v_2 \in V$  gegeben mit  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ . Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0.$$

Daher ist  $v_1 - v_2 \in \text{kern } \varphi$  und damit  $v_1 = v_2$ . □

Die folgende Aussage heißt *Dimensionsformel*.

SATZ 9.8. *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine  $K$ -lineare Abbildung und  $V$  sei endlichdimensional. Dann gilt*

$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \dim(\text{bild } \varphi).$$

*Beweis.* Sei  $n = \dim(V)$ . Es sei  $U = \ker \varphi \subseteq V$  der Kern der Abbildung und  $s = \dim(U)$  seine Dimension ( $s \leq n$ ). Es sei

$$u_1, \dots, u_s$$

eine Basis von  $U$ . Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es Vektoren

$$v_1, \dots, v_{n-s}$$

derart, dass

$$u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_{n-s}$$

eine Basis von  $V$  ist. Wir behaupten, dass

$$w_j = \varphi(v_j), \quad j = 1, \dots, n-s,$$

eine Basis des Bildes ist. Es sei  $w \in W$  ein Element des Bildes  $\varphi(V)$ . Dann gibt es ein  $v \in V$  mit  $\varphi(v) = w$ . Dieses  $v$  lässt sich mit der Basis als

$$v = \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j$$

schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned} w &= \varphi(v) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^s \lambda_i \varphi(u_i) + \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j w_j, \end{aligned}$$

so dass sich  $w$  als Linearkombination der  $w_j$  schreiben lässt. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit der  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n-s$ , sei eine Darstellung der Null gegeben,

$$0 = \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j w_j.$$

Dann ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j \varphi(v_j) = 0.$$

Also gehört  $\sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j$  zum Kern der Abbildung und daher kann man

$$\sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j = \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i$$

schreiben. Da insgesamt eine Basis vorliegt, folgt daraus, dass alle Koeffizienten null sein müssen, also sind insbesondere  $\gamma_j = 0$ .  $\square$

DEFINITION 9.9. Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine  $K$ -lineare Abbildung und  $V$  sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\text{rang } \varphi := \dim(\text{bild } \varphi)$$

den *Rang* von  $\varphi$ .

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \text{rang } \varphi$$

ausdrücken.

KOROLLAR 9.10. *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  der gleichen Dimension  $n$ . Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  genau dann injektiv, wenn  $\varphi$  surjektiv ist.*

*Beweis.* Dies folgt aus Fakt \*\*\*\*\* und Fakt \*\*\*\*\*. □

LEMMA 9.11. *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung*

$$\varphi^{-1} : W \longrightarrow V$$

*linear.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe \*\*\*\*\* □

## Der Matrizenkalkül

Eine lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^m$$

ist durch die Bilder  $\varphi(e_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , der Standardvektoren eindeutig festgelegt, und jedes  $\varphi(e_j)$  ist eine Linearkombination

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$$

und damit durch die Elemente  $a_{ij}$  eindeutig festgelegt. Insgesamt ist also eine solche lineare Abbildung durch  $mn$  Elemente  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , festgelegt. Eine solche Datenmenge fasst man als eine Matrix zusammen.

DEFINITION 9.12. Es sei  $K$  ein Körper und  $I$  und  $J$  zwei Indexmengen. Eine  $I \times J$ -Matrix ist eine Abbildung

$$I \times J \longrightarrow K, (i, j) \longmapsto a_{ij}.$$

Bei  $I = \{1, \dots, m\}$  und  $J = \{1, \dots, n\}$  spricht man von einer  $m \times n$ -Matrix. In diesem Fall schreibt man eine Matrix zumeist tabellarisch als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wir beschränken uns weitgehend auf den durchnummerierten Fall. Zu jedem  $i \in I$  heißt  $a_{ij}$ ,  $j \in J$ , die  $i$ -te Zeile der Matrix, was man zumeist als einen Zeilenvektor

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

schreibt. Zu jedem  $j \in J$  heißt  $a_{ij}$ ,  $i \in I$ , die  $j$ -te Spalte der Matrix, was man zumeist als einen Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

schreibt. Die Elemente  $a_{ij}$  heißen die Einträge der Matrix. Zu  $a_{ij}$  heißt  $i$  der Zeilenindex und  $j$  der Spaltenindex des Eintrags. Man findet den Eintrag  $a_{ij}$ , indem man die  $i$ -te Zeile mit der  $j$ -ten Spalte kreuzt. Eine Matrix mit  $m = n$  nennt man eine quadratische Matrix. Eine  $m \times 1$ -Matrix ist einfach ein Spaltenvektor der Länge  $m$ , und eine  $1 \times n$ -Matrix ist einfach ein Zeilenvektor der Länge  $n$ .

DEFINITION 9.13. Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix und  $B$  eine  $n \times p$ -Matrix. Dann ist das Matrixprodukt

$$AB$$

diejenige  $m \times p$ -Matrix, deren Einträge durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

gegeben sind.

Eine solche Matrizenmultiplikation ist also nur möglich, wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Als Merkregel kann man das Schema

$$(ZEILE) \begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} = ZS + EP + IA + LL + ET$$

verwenden. Insbesondere kann man eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  mit einem Spaltenvektor der Länge  $n$  (von rechts) multiplizieren, und erhält dabei einen Spaltenvektor der Länge  $m$ .

BEMERKUNG 9.14. Wenn man eine Matrix  $A = (a_{ij})_{ij}$  mit einem Spalten-

vektor  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  multipliziert, so erhält man

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit dem *Störvek-*

*tor*  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$  kurz schreiben als

$$Ax = c.$$

Die erlaubten Gleichungsumformungen durch Manipulation an den Zeilen, die den Lösungsraum nicht ändern, können dann durch die entsprechenden Zeilenumformungen in der Matrix ersetzt werden. Man muss dann die Variablen nicht mitschleppen.





## Abbildungsverzeichnis