

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 16

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 16.1. Sei $X = K\text{-Spek}(R)$ das K -Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen K -Algebra. Dann wird ein irreduzibler Filter durch offene Mengen der Form $D(f)$ erzeugt.

AUFGABE 16.2. Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K . Zeige, dass die Einheiten in $\Gamma(U, \mathcal{O})$ den Morphismen von U nach $\mathbb{A}_K^\times = \mathbb{A}_K^1 \setminus \{0\}$ entsprechen.

AUFGABE 16.3. Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und sei

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

ein Morphismus. Zeige, dass ψ genau dann durch die abgeschlossene Menge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ faktorisiert, wenn \mathfrak{a} im Kern des globalen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi}: K[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$$

liegt.

AUFGABE 16.4. Sei $X = K\text{-Spek}(R)$ eine affine Varietät und $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeige, dass der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(Z)$ von offenen Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird.

AUFGABE 16.5. Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass ein Ultrafilter irreduzibel ist.

AUFGABE 16.6.*

Man beschreibe einen K -Algebra-Homomorphismus derart, dass die induzierte Abbildung der K -Spektren die Addition auf K beschreibt.

AUFGABE 16.7. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass die Addition, die Multiplikation, das Negative, das Inverse und die Division in K sich als Morphismen realisieren lassen.

AUFGABE 16.8. Sei M ein kommutatives Monoid. Finde eine allgemeine Definition von *Filter* derart, dass einerseits die topologischen Filter und andererseits die saturierten multiplikativen Systeme sich als Spezialfälle ergeben.

AUFGABE 16.9. (Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_n)$ ein endlich erzeugtes Ideal. Es sei $f \in R$ ein weiteres Element. Dann nennt man die R -Algebra

$$A = R[T_1, \dots, T_n]/(f_1T_1 + \dots + f_nT_n + f)$$

die *erzwingende Algebra* zu den f_1, \dots, f_n, f . Zeige, dass A folgende Eigenschaft erfüllt: zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$ in einen kommutativen Ring S mit der Eigenschaft $\varphi(f) \in \mathfrak{a}S$ gibt es einen R -Algebra Homomorphismus $\vartheta : A \rightarrow S$. Zeige ebenso, dass dieser Homomorphismus *nicht* eindeutig bestimmt ist.

AUFGABE 16.10. Sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Es seien f_1, \dots, f_n, f Elemente in R und es sei

$$A = R[T_1, \dots, T_n]/(f_1T_1 + \dots + f_nT_n + f)$$

die erzwingende Algebra zu diesen Daten. Charakterisiere die Fasern des zugehörigen Morphismus

$$K\text{-Spek}(A) \rightarrow K\text{-Spek}(R)$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 16.11. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S integrale K -Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi : R \rightarrow S$ ein K -Algebra Homomorphismus mit zugehörigem Morphismus $\varphi^* : K\text{-Spek}(S) \rightarrow K\text{-Spek}(R)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) φ ist injektiv.
- (2) Das Bild von φ^* ist dicht in $K\text{-Spek}(R)$.
- (3) φ induziert einen Ringhomomorphismus $Q(R) \rightarrow Q(S)$.

AUFGABE 16.12. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S zwei integrale K -Algebren von endlichem Typ. Es sei ein K -Algebra Homomorphismus

$$\varphi : Q(R) \longrightarrow Q(S)$$

zwischen den Quotientenkörpern gegeben. Zeige, dass es eine offene Teilmenge $U \subseteq K\text{-Spek}(S)$ und einen Morphismus

$$U \longrightarrow K\text{-Spek}(R)$$

gibt, der φ induziert.

AUFGABE 16.13. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affin-algebraischen Kurven C_1 und C_2 über \mathbb{C} und einem Morphismus

$$\psi : C_1 \longrightarrow C_2,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrabbildung nicht stetig in der metrischen Topologie ist.

AUFGABE 16.14. (8 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affinen Varietäten V_1 und V_2 und einem Morphismus

$$\psi : V_1 \longrightarrow V_2,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrabbildung nicht stetig (in der Zariski-Topologie) ist.

(und daher auch kein Morphismus)

AUFGABE 16.15. (3 Punkte)

Sei $U \subseteq K\text{-Spek}(R)$ eine quasiaffine Varietät und sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ eine algebraische Funktion. Es seien $q = g_i/h_i$, $i = 1, \dots, n$, lokale Darstellungen von f auf $D(h_i) \subseteq U$. Zeige, dass das Urbild $f^{-1}(0)$ gleich der abgeschlossenen Menge $V(h_1g_1, \dots, h_n g_n) \cap U$ ist.