Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 21

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 21.1. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

Aufgabe 21.2. Sei R ein Integritätsbereich mit Normalisierung R^{norm}. Zeige, dass durch

$$\mathfrak{f} = \{g \in R \mid gR^{\text{norm}} \subseteq R\}$$

ein Ideal in R gegeben ist.

Aufgabe 21.3. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt werde. Zeige, dass für das Führungsideal des zugehörigen Monoidrings $K[M]$ die Beziehung

$$\mathfrak{f} = (M_{\geq f})$$

besteht, wobei f die Führungszahl des Monoids bezeichnet.

Aufgabe 21.4. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Charakterisiere die endlich erzeugten R-Untermoduln von Q. Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.5. (4 Punkte)

Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 21.4 formuliert sind.

Aufgabe 21.6. (3 Punkte)

Sei R ein diskreter Bewertungsring. Definiere zu einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Ordnung

$$\operatorname{ord}(q) \in \mathbb{Z}\,.$$

Dabei soll die Definition mit der Ordnung für Elemente aus R übereinstimmen und einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ definieren. Was ist der Kern dieses Homomorphismus?

Aufgabe 21.7. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K. Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

Aufgabe 21.8. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S integre K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi\colon R \to S$ ein endlicher injektiver K-Algebra-Homomorphismus. Zeige, dass dann $\varphi^*\colon K\text{–Spek}\,(S) \to K\text{–Spek}\,(R)$ surjektiv ist.

Aufgabe 21.9. (5 Punkte)

Sei R ein Hauptidealbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(R)$. Zeige, dass jeder Zwischenring S, $R \subseteq S \subseteq Q$, eine Nenneraufnahme ist.