Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 16

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 16.1. Sei $X = K{-}\operatorname{Spek}(R)$ das K-Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen K-Algebra. Dann wird ein irreduzibler Filter durch offene Mengen der Form $D(f)$ erzeugt.

Aufgabe 16.2. Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zeige, dass die Einheiten in $\Gamma(U, \mathcal{O})$ den Morphismen von U nach $\mathbb{A}_K^\times = \mathbb{A}_K^1 \setminus \{0\}$ entsprechen.

Aufgabe 16.3. Betrachte $V = V(XW - YZ) \subseteq \mathbb{A}_K^4$. Beschreibe eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}_K^4$ derart, dass der zu $U \cap V \subseteq U$ gehörende Ringhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O})$$

nicht surjektiv ist.

Aufgabe 16.4. Zeige, dass der Ring $\Gamma(U, \mathcal{O})$ reduziert ist.

Aufgabe 16.5. Sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei $U \subseteq K{-}\operatorname{Spek}(R)$ eine offene Teilmenge und $f : U \longrightarrow K$ eine Funktion. Es sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung mit der Eigenschaft, dass die Einschränkungen $f_i = f|_{U_i}$ algebraische Funktionen sind. Zeige, dass dann f selbst algebraisch ist.

Aufgabe 16.6. Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und sei

$$\psi\colon\, U \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

ein Morphismus. Zeige, dass ψ genau dann durch die abgeschlossene Menge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ faktorisiert, wenn $\mathfrak{a}$ im Kern des globalen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi} : K[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$$

liegt.

Aufgabe 16.7. Sei $X = K-\mathrm{Spek}\,(R)$ eine affine Varietät und $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeige, dass der Umgebungsfilter $U(Z)$ von offenen Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird.

Aufgabe 16.8. Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass ein Ultrafilter irreduzibel ist.

Aufgabe 16.9.*

Man beschreibe einen K-Algebra-Homomorphismus derart, dass die induzierte Abbildung der K-Spektren die Addition auf K beschreibt.

Aufgabe 16.10. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass die Addition, die Multiplikation, das Negative, das Inverse und die Division in K sich als Morphismen realisieren lassen.

Aufgabe 16.11. Sei M ein kommutatives Monoid. Finde eine allgemeine Definition von *Filter* derart, dass einerseits die topologischen Filter und andererseits die saturierten multiplikativen Systeme sich als Spezialfälle ergeben.

Aufgabe 16.12. (Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$ ein endlich erzeugtes Ideal. Es sei $f \in R$ ein weiteres Element. Dann nennt man die R-Algebra

$$A = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \ldots + f_nT_n + f)$$

die *erzwingende Algebra* zu den $f_1, \ldots, f_n, f$. Zeige, dass A folgende Eigenschaft erfüllt: zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ in einen kommutativen Ring S mit der Eigenschaft $\varphi(f) \in \mathfrak{a}S$ gibt es einen R-Algebra Homomorphismus $\vartheta : A \longrightarrow S$. Zeige ebenso, dass dieser Homomorphismus *nicht* eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 16.13. Sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Es seien $f_1, \ldots, f_n, f$ Elemente in R und es sei

$$A = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \ldots + f_nT_n + f)$$

die erzwingende Algebra zu diesen Daten. Charakterisiere die Fasern des zugehörigen Morphismus

$$K-\mathrm{Spek}\,(A) \longrightarrow K-\mathrm{Spek}\,(R)$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.14. (4 Punkte)

Sei $X = K-\mathrm{Spek}\,(R)$ eine affine Varietät und seien $P_1, \ldots, P_n \in X$ endlich viele Punkte. Es sei F der Umgebungsfilter dieser Punkte und $\mathcal{O}_F$ der zugehörige Halm. Zeige, dass $\mathcal{O}_F$ genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 16.15. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S integre K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi : R \to S$ ein K-Algebra Homomorphismus mit zugehörigem Morphismus $\varphi^* : K-\mathrm{Spek}\,(S) \to K-\mathrm{Spek}\,(R)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist injektiv.
(2) Das Bild von φ^* ist dicht in $K-\mathrm{Spek}\,(R)$.
(3) φ induziert einen Ringhomomorphismus $Q(R) \to Q(S)$.

Aufgabe 16.16. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S zwei integre K-Algebren von endlichem Typ. Es sei ein K-Algebra Homomorphismus

$$\varphi : Q(R) \longrightarrow Q(S)$$

zwischen den Quotientenkörpern gegeben. Zeige, dass es eine offene Teilmenge $U \subseteq K-\mathrm{Spek}\,(S)$ und einen Morphismus

$$U \longrightarrow K-\mathrm{Spek}\,(R)$$

gibt, der φ induziert.

Aufgabe 16.17. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affin-algebraischen Kurven C_1 und C_2 über $\mathbb{C}$ und einem Morphismus

$$\psi : C_1 \longrightarrow C_2\,,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrabbildung nicht stetig in der metrischen Topologie ist.

Aufgabe 16.18. (8 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affinen Varietäten V_1 und V_2 und einem Morphismus

$$\psi : V_1 \longrightarrow V_2 \,,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrungabbildung nicht stetig (in der Zariski-Topologie) ist.

(und daher auch kein Morphismus)

Aufgabe 16.19. (3 Punkte)

Sei $U \subseteq K-\text{Spek}\,(R)$ eine quasiaffine Varietät und sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ eine algebraische Funktion. Es seien $q = g_i/h_i$, $i = 1, \ldots, n$, lokale Darstellungen von f auf $D(h_i) \subseteq U$. Zeige, dass das Urbild $f^{-1}(0)$ gleich der abgeschlossenen Menge $V(h_1g_1, \ldots, h_ng_n) \cap U$ ist.