Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

16. Juni 2012

Mathematik für Anwender II

Testklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum V.
(2) Eine *stetige Abbildung* zwischen zwei metrischen Räumen M und N.
(3) Eine *differenzierbare Kurve*
$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(4) Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und einer K-linearen Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow V.$$
(5) Eine *trigonalisierbare* lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ (V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum).
(6) Ein *homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.
(7) Die *Jacobi-Matrix* zu einer partiell differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$.
(8) Das *totale Differential* in einem Punkt $P \in V$ einer in diesem Punkt total differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
(dabei seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume).

Lösung:

(1) Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung
$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\ (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle\,,$$
mit folgenden Eigenschaften:
  (a) Es ist
  $$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$
  für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2, y \in V$ und ebenso in der zweiten Komponente.
  (b) Es ist
  $$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$
  für alle $v, w \in V$.
  (c) Es ist $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(2) Eine Abbildung
$$f : M \longrightarrow N$$
heißt *stetig*, wenn für jedes $x \in M$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass
$$f\left(U\left(x, \delta\right)\right) \subseteq U\left(f(x), \epsilon\right)$$

gilt.

(3) Eine Abbildung

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt eine *differenzierbare Kurve*, wenn für jedes $t \in I$ der Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

existiert.

(4) Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und φ ist durch

$$\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi) := \{v \in V \,|\, \varphi(v) = \lambda v\}$$

definiert.

(5) Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

(6) Ein *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten* ist eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv \,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist.

(7) Die Matrix

$$\mathrm{Jak}(\varphi)_P := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

heißt die *Jacobi-Matrix* zu φ im Punkt P.

(8) Die lineare Abbildung L mit der Eigenschaft

$$\varphi(P+v) = \varphi(P) + L(v) + ||\,v\,||\; r(v)$$

(wobei $r : U(0,\delta) \to W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist) heißt das totale Differential von φ an der Stelle P.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Die Formel für die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve
$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n .$$
(2) Der Satz über die Beziehung von algebraischer und geometrischer Vielfachheit zu einer linearen Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.
(3) Der Satz über den Zusammenhang von totaler Differenzierbarkeit und Richtungsableitung für eine Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$.
(4) Die *Kettenregel* zu zwei total differenzierbaren Abbildungen
$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
und
$$g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$.

<u>Lösung:</u>

(1) Für die Kurvenlänge gilt
$$L(f) = \int_a^b || f'(t) || \; dt \, .$$
(2) Es sei $\lambda \in K$. Dann besteht zwischen der geometrischen und der algebraischen Vielfachheit die Beziehung
$$\dim (\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)) \leq \mu_\lambda(\varphi) \, .$$
(3) Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar mit dem totalen Differential $(D\varphi)_P$. Dann ist φ in P in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und es gilt
$$(D_v \varphi)(P) = (D\varphi)_P \, (v) \; .$$
(4) Die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist ebenfalls total differenzierbar, und zwischen den totalen Differentialen in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ besteht die Beziehung
$$(D(g \circ f))_P = (Dg)_{f(P)} \circ (Df)_P \, .$$

Aufgabe 3. Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

Der Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ besitzt die Norm $\sqrt{2}$, somit ist

$$u_1 = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

der zugehörige normierte Vektor. Der zweite Vektor muss senkrecht zu u_1 sein und zusammen mit u_1 den Untervektorraum $\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$ aufspannen. Dies führt zum Ansatz

$$0 = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\1\\1+\lambda\end{pmatrix} \rangle = 1+1+\lambda,$$

sodass

$$\lambda = -2$$

und $w_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ist. Der normierte Vektor dazu ist

$$u_2 = \begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Der dritte Vektor muss senkrecht auf u_1 und u_2 stehen. Ein solcher Vektor ist offenbar $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Daher kann man

$$u_3 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

als dritten Vektor der Orthonormalbasis nehmen.

AUFGABE 4. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq M$ abgeschlossen ist.

Lösung:

Die endliche Punktmenge sei $P_1, \ldots, P_n \in M$. Wir müssen zeigen, dass das Komplement $U = M \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ dieser Punktmenge offen ist. D.h. wir müssen zeigen, dass es zu jedem Punkt $Q \in M$, $Q \neq P_1, \ldots, P_n$, eine offene Ballumgebung $U(Q, \epsilon)$ gibt, die ganz in U liegt. Wegen $Q \neq P_i$ ist $d(Q, P_i) = \epsilon_i > 0$. Wir setzen $\epsilon := \min_{i=1,\ldots,n}\{\epsilon_i\}$. Dann enthält $U(Q, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} U(Q, \epsilon_i)$ keinen der Punkte.

Aufgabe 5. Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, \sin t\,).$$

a) Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.

b) Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.

c) Zeige, dass für die Länge L dieser Kurve die Abschätzung

$$L \le \sqrt{2}\pi$$

gilt.

Lösung:

b) Die Unterteilungspunkte sind

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\,.$$

Der Sinus hat dabei folgende Werte:

$$\sin 0 = 0,\ \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin \frac{\pi}{2} = 1,\ \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin \pi = 0\,.$$

Dabei ergibt sich die zweite Gleichung aus $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$ und der Kreisgleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Die dritte Gleichung folgt daraus aus der Symmetrie des Sinus.

Die erste Teilstrecke des Streckenzugs verbindet die beiden Punkte $(0,0)$ und $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, deren Länge ist also

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\frac{\pi}{4})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} &= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + \frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + \frac{8}{4^2}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 8}.
\end{aligned}$$

Die zweite Teilstrecke des Streckenzugs verbindet die beiden Punkte $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{\pi}{2}, 1)$, deren Länge ist also

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\frac{\pi}{4})^2 + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2} &= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + (\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})^2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + \frac{2 + 1 - 2\sqrt{2}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + \frac{24 - 16\sqrt{2}}{4^2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 24 - 16\sqrt{2}}.$$

Die dritte Teilstrecke ist gleichlang zur zweiten und die vierte Teilstrecke ist gleichlang zur ersten. Daher ist die Gesamtlänge dieses Streckenzugs insgesamt gleich

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\pi^2 + 8} + \sqrt{\pi^2 + 24 - 16\sqrt{2}})\,.$$

c) Da die Kurve stetig differenzierbar ist, ist sie auch rektifizierbar, und ihre Länge ist gleich

$$L = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 t}\, dt\,.$$

Wegen $-1 \leq \cos t \leq 1$ ist $\cos^2 t \leq 1$ und daher ist $1 + \cos^2 t \leq 2$. Wegen der Monotonie der Quadratwurzel folgt

$$\sqrt{1 + \cos^2 t} \leq \sqrt{2}.$$

Also ist

$$\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 t}\, dt \leq \int_0^\pi \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\pi.$$

Aufgabe 6. Es sei
$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
eine stetig differenzierbare Kurve und sei
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
eine lineare Isometrie. Beweise die Längengleichheit
$$L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma)\,.$$

Lösung:

Für eine stetig differenzierbare Kurve
$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
gilt
$$L(\gamma) = \int_a^b \,||\,\gamma'(t)\,||\; dt\,.$$
Die Kurve $\varphi \circ \gamma$ ist ebenfalls stetig differenzierbar, und nach der Kettenregel gilt
$$(\varphi \circ \gamma)'(t) \,=\, (D\varphi)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \,=\, \varphi(\gamma'(t)),$$
da φ linear ist. Da φ eine Isometrie ist, stimmt die Norm von $\gamma'(t)$ mit der Norm von $\varphi(\gamma'(t))$ überein. Daher ist
$$L(\varphi \circ \gamma) \,=\, \int_a^b \,||\,(\varphi \circ \gamma)'(t)\,||\; dt \,=\, \int_a^b \,||\,\gamma'(t)\,||\; dt \,=\, L(\gamma).$$

Aufgabe 7. Sei

$$\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \left(t^2, -t^2+1, t\right),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \left(y^2 - xz, xyz, 5x^2z - yz\right) .$$

<u>Lösung:</u>

Es ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_{-1}^{1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \langle \begin{pmatrix} (-t^2+1)^2 - t^3 \\ t^3(-t^2+1) \\ 5t^5 - t(-t^2+1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix} \rangle dt \\
&= \int_{-1}^{1} \langle \begin{pmatrix} t^4 - t^3 - 2t^2 + 1 \\ -t^5 + t^3 \\ 5t^5 + t^3 - t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix} \rangle dt \\
&= \int_{-1}^{1} 2t(t^4 - t^3 - 2t^2 + 1) - 2t(-t^5 + t^3) + 5t^5 + t^3 - t dt \\
&= \int_{-1}^{1} 2t^5 - 2t^4 - 4t^3 + 2t + 2t^6 - 2t^4 + 5t^5 + t^3 - t dt \\
&= \int_{-1}^{1} 2t^6 + 7t^5 - 4t^4 - 3t^3 + t dt \\
&= \left(\frac{2}{7}t^7 + \frac{7}{6}t^6 - \frac{4}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2\right) |_{-1}^{1}.
\end{aligned}$$

Für die geraden Exponenten heben sich die Summanden zu 1 und -1 weg, zu ungeraden Exponenten verdoppeln sie sich. Daher ist dieses Integral gleich

$$2\left(\frac{2}{7} - \frac{4}{5}\right) = 2\frac{10-28}{35} = 2\frac{-18}{35} = -\frac{36}{35}.$$

AUFGABE 8. Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = 3yy' + y^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Lösung:

Wir machen den Ansatz

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,,$$

aufgrund der Anfangswertbedingungen ist $a_0 = 0$ und $a_1 = 2$. Es ist $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ und $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$. Aus der Gleichung

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \;=\; 3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right)^2$$

lassen sich die Koeffizienten a_i bestimmen.

Koeffizientenvergleich zu t^0 ergibt

$$2a_2 \;=\; 3a_0 a_1 + a_0^2 \;=\; 0,$$

also ist $a_2 = 0$.

Koeffizientenvergleich zu t^1 ergibt

$$6a_3 \;=\; 3\,(a_1 a_1 + 2a_0 a_2) + 2a_0 a_1 \;=\; 12,$$

also ist $a_3 = 2$.

Koeffizientenvergleich zu t^2 ergibt

$$12a_4 \;=\; 3\,(a_2 a_1 + 2a_1 a_2 + 3a_0 a_3) + 2a_0 a_2 + a_1^2 \;=\; a_1^2 \;=\; 4,$$

also ist $a_4 = \frac{1}{3}$.

Daher ist

$$2t + 2t^3 + \frac{1}{3} t^4$$

die Lösung des Anfangswertproblems bis zur Ordnung 4.

Aufgabe 9. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ v \longmapsto Mv.$$

Lösung:

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & -5 \\ 0 & x+1 & 0 \\ -8 & 0 & x-5 \end{pmatrix} \\ &= (x-2)(x+1)(x-5) - 40(x+1) \\ &= (x+1)((x-2)(x-5) - 40) \\ &= (x+1)(x^2 - 7x - 30). \end{aligned}$$

Dies ergibt zunächst den Eigenwert -1. Durch quadratisches Ergänzen (oder direkt) sieht man für den quadratischen Term die Nullstellen -3 und 10, die die weiteren Eigenwerte sind. Da es drei verschiedene Eigenwerte gibt ist klar, dass zu jedem Eigenwert der Eigenraum eindimensional ist.

Eigenraum zu -1

Man muss die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Lösung ist offenbar der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so dass der Eigenraum zu -1 gleich $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Eigenraum zu -3

Man muss die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Lösung ist offenbar der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, so dass der Eigenraum zu -3 gleich $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist.

Eigenraum zu 10

Man muss die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & 0 \\ -8 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Lösung ist offenbar der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, so dass der Eigenraum zu 10 gleich $\lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 10. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+i \\ 0 & i & 1+i \\ 0 & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

<u>Lösung:</u>

a) Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & 2-i \\ 0 & x-i & -1-i \\ 0 & 0 & x+1-2i \end{pmatrix} \\ &= (x-2)(x-i)(x+1-2i) \\ &= x^3-(1+3i)x^2+(2i-2(1-2i)-i(1-2i))x+2i(1-2i) \\ &= x^3-(1+3i)x^2+(-4+5i)x+4+2i \end{aligned}$$

und die Eigenwerte von A sind $2, i, -1+2i$.

b) Wir bestimmen für jeden Eigenwert einen Eigenvektor.

$x = 2$:

Wir müssen ein nichttriviales Element im Kern von

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2-i \\ 0 & 2-i & -1-i \\ 0 & 0 & 3-2i \end{pmatrix}$$

bestimmen. Da gehört $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dazu.

$x = i$:

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} -2+i & -1 & 2-i \\ 0 & 0 & -1-i \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $c = 0$ und $a = 1$ und erhalten $b = -2+i$, also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert i.

$x = -1 + 2i$:

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} -3+2i & -1 & 2-i \\ 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Mit $c = -1+i$ und $b = 1+i$ ist die mittlere Zeile erfüllt. Die erste Zeile wird dann zu

$$(-3+2i)a - 1 - i + (2-i)(-1+i) = 0$$

und daher ist

$$(-3+2i)a \;=\; 1+i-(2-i)(-1+i) \;=\; 1+i-2i+2-1-i \;=\; 2-2i.$$

Daher ist

$$a \;=\; (2-2i)(-3+2i)^{-1} \;=\; (2-2i)\frac{-3-2i}{13} \;=\; \frac{-10+2i}{13}.$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} \frac{-10+2i}{13} \\ 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $-1+2i$.

c) Bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren besitzt die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1+2i \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 11. Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Lösung:

Aus der zweiten Zeile folgt sofort

$$v_2(t) = ae^{2t} ,$$

wobei die Anfangsbedingung $v_2(0) = 1$ durch $a = 1$ erfüllt wird. Für v_1 ergibt sich daraus die inhomogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen,

$$v_1' = 3v_1 - 4e^{2t} \text{ mit } v_1(0) = 5 .$$

Die zugehörige homogene lineare Gleichung besitzt die Lösungen ce^{3t}. Mittels Variation der Konstanten, also dem Ansatz $v_1(t) = c(t)e^{3t}$, ergibt sich die Bedingung

$$c'(t) = -4e^{2t} \cdot e^{-3t} = -4e^{-t}.$$

Also ist $c(t) = 4e^{-t} + b$ mit einer Konstanten $b \in \mathbb{R}$. Aus

$$(4e^0 + b)e^0 = 5$$

folgt $b = 1$. Die Lösung ist also

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4e^{-t} + 1)e^{3t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 12. a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix. Das charakteristische Polynom davon ist

$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5).$

Daher sind 1 und 5 die Eigenwerte, und daher ist die Matrix diagonalisierbar.

Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert 1 berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} .$$

Dies ergibt den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 und damit die erste Fundamentallösung

$$e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert 5 berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dies ergibt den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 5 und damit die zweite Fundamentallösung

$$e^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung hat demnach die Form

$$ae^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t + be^{5t} \\ -ae^t + 3be^{5t} \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} .$$

b) Um das Anfangsproblem zu lösen müssen wir a und b so bestimmen, dass

$$\begin{pmatrix} a + b \\ -a + 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ist. Dies ist ein lineares Gleichungssystem, Addition führt auf

$$4b = 9\,,$$

also $b = \frac{9}{4}$ und daher $a = -\frac{1}{4}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$-\frac{1}{4}e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{9}{4}e^{5t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 13. Bestimme zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto t^2,$$

die Richtungsableitung in Richtung 3 für jeden Punkt.

<u>Lösung:</u>

Es ist

$$(D_3 f)(t) \,=\, 3(D_1 f)(t) \,=\, 3f'(t) \,=\, 3 \cdot 2t \,=\, 6t.$$

AUFGABE 14. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x^2+y^4},\ \frac{x^2 y}{x^2+y^2},\ \ln(x^2+y^2) \right)$$

in jedem Punkt.

<u>Lösung:</u>

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{(x^2+y^4)\cos x - 2x\sin x}{(x^2+y^4)^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-4y^3 \sin x}{(x^2+y^4)^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2 y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2 y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

und

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Somit ist die Jacobi-Matrix in einem Punkt (x,y) gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{(x^2+y^4)\cos x - 2x\sin x}{(x^2+y^4)^2} & \frac{-4y^3\sin x}{(x^2+y^4)^2} \\ \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15. Bestätige die Kettenregel für $g \circ f$ für die beiden differenzierbaren Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^3 - t, -t^2),$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy + x + y.$$

<u>Lösung:</u>

Die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f$ ist durch

$$\begin{aligned} g(f(t)) &= g(t^3 - t, -t^2) \\ &= (t^3 - t)(-t^2) + t^3 - t - t^2 \\ &= -t^5 + t^3 + t^3 - t - t^2 \\ &= -t^5 + 2t^3 - t^2 - t \end{aligned}$$

gegeben, ihre Ableitung ist

$$-5t^4 + 6t^2 - 2t - 1\,.$$

Die Jacobi-Matrix zu f ist

$$\operatorname{Jak}(f)_t = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ -2t \end{pmatrix}$$

und die Jacobi-Matrix zu g ist

$$\operatorname{Jak}(g)_{(x,y)} = (y + 1,\ x + 1)\ .$$

Daher ist die Jacobi-Matrix zu g in einem Punkt $f(t)$ gleich

$$\operatorname{Jak}(g)_{(f_1(t), f_2(t))} = \left(-t^2 + 1,\ t^3 - t + 1\right)\ .$$

Das zu bildende Matrixprodukt dieser beiden Matrizen ist

$$\begin{aligned} \left(-t^2 + 1,\ t^3 - t + 1\right) \circ \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ -2t \end{pmatrix} &= (-t^2 + 1)(3t^2 - 1) + (t^3 - t + 1)(-2t) \\ &= -3t^4 + 4t^2 - 1 - 2t^4 + 2t^2 - 2t \\ &= -5t^4 + 6t^2 - 2t - 1. \end{aligned}$$

Dies stimmt natürlich mit der direkt bestimmten Ableitung überein.