Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 52

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 52.1. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$, $U \subseteq V$ offen und

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Es sei

$$\gamma\colon I \longrightarrow U$$

eine differenzierbare Kurve, die ganz in einer Niveaumenge von f verläuft. Zeige, dass

$$\langle \operatorname{grad} f(P), \gamma'(t)\rangle = 0$$

ist für alle $t \in I$.

Aufgabe 52.2. Es seien L und M Mengen und $L \times M$ ihre Produktmenge. Beschreibe die Faser der Projektion

$$L \times M \longrightarrow M,\, (x,y) \longmapsto y,$$

über einem Punkt $y \in M$. Kann die Faser leer sein?

Aufgabe 52.3. Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - x^2 - 2x + 2.$$

Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}$ ist φ regulär? Was besagt der Satz über implizite Abbildungen in dieser Situation? Wie sieht lokal die Faser in einem regulären Punkt aus? Kann es leere Fasern geben? Bestimme die Faser über 0.

Aufgabe 52.4. Seien $L_1, \ldots, L_n$ und $M_1, \ldots, M_n$ Mengen und seien

$$\varphi_i\colon L_i \longrightarrow M_i$$

Abbildungen. Zu einem Punkt $P_i \in M_i$ sei $F_i \subseteq L_i$ die Faser von φ_i über P_i. Zeige, dass die Faser der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n$ über $P = (P_1, \ldots, P_n)$ gleich $F_1 \times \cdots \times F_n$ ist.

Aufgabe 52.5. Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetig differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen f' und g' stets positiv seien. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto f(x) + g(y),$$

stetig differenzierbar und in jedem Punkt regulär ist. Man gebe explizit eine Beschreibung der Fasern von φ als Graph an.

Aufgabe 52.6. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen $\mathbb{R}$ und den Fasern von φ an.

Aufgabe 52.7. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy.$$

Aufgabe 52.8.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2}\right).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ.

b) Zeige, dass φ in $P = (1,2)$ lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ besitzt, und bestimme das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$.

c) Man gebe alle Punkte $Q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}$ an, in denen φ nicht lokal invertierbar ist.

Aufgabe 52.9.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ (a,b,c,d,u,v) \longmapsto (au+bv+c+d, ad-bc, ac-b^2, bd-c^2).$$

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.

b) Zeige, dass φ im Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Zeige, dass φ in $(1,1,0,0,1,1)$ regulär ist.

Die nächste Aufgabe knüpft an Aufgabe 33.17 an.

Aufgabe 52.10. Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung differenzierbar? Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär, wie sehen die Fasern aus?

In der speziellen Relativitätstheorie ist auf dem $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die *Lorentz-Form*

$$\langle v, w \rangle = \langle (t, x_1, \ldots, x_n), (s, y_1, \ldots, y_n) \rangle := -c^2 ts + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

wichtig, wobei c die Lichtgeschwindigkeit repräsentiert. Diese Form ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform vom Typ $(n, 1)$. Sie erlaubt es, die „Welt“ in lichtartige, zeitartige und raumartige Vektoren aufzuteilen, und den Zusammenhang dieser fundamentalen Größen zu verstehen. Die zugehörige quadratische Form ist die Abbildung

$$\varphi \colon V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto -c^2 t^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Ein Vektor $v \in V$ heißt *zeitartig*, wenn $\varphi(v) < 0$ ist, *lichtartig*, wenn $\varphi(v) = 0$ ist und *raumartig*, wenn $\varphi(v) > 0$ ist. Mathematisch setzt man im Allgemeinen $c = 1$.

Aufgabe 52.11. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x) \longmapsto -t^2 + x^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 52.12. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x, y) \longmapsto -t^2 + x^2 + y^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 52.13. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \varphi(P) = 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt derart, dass

$$\varphi(x, y) = f(x) + g(y)$$

gilt.

Aufgabe 52.14. (5 Punkte)

Zeige, dass die Fasern der Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt $P = (x, y)$ lokal homöomorph zu einem offenen reellen Intervall sind. D.h. dass es zu jedem Punkt $P = (x, y)$ eine offene Umgebung $(x, y) \in U$, ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine stetige Bijektion

$$I \longrightarrow U \cap F_P,$$

gibt (wobei F_P die Faser von φ durch P bezeichnet), deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 52.15. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein isolierter Punkt, d.h. es gebe eine offene Umgebung $P \in U$ derart, dass $\varphi(Q) \neq \varphi(P)$ ist für alle $Q \in U$, $Q \neq P$. Zeige, dass dann φ in P ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 52.16. (3 Punkte)

Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Aufgabe 52.17. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2,$$

im Punkt $P = (1, -1, 2)$. Man gebe eine differenzierbare Abbildung

$$\psi\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, wobei U eine möglichst große offene Teilmenge des Tangentialraumes $T_P F$ an die Faser F_P von φ durch P ist, die eine Bijektion zwischen U und $V \cap F_P$ stiftet ($P \in V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen).

Aufgaben zum Hochladen

Aufgabe 52.18. (5 Punkte)

Sei

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Man fertige eine Skizze an, die die Fasern, die Tangentialräume und lokale Diffeomorphismen zwischen Tangentialraum und Faser sichtbar macht.

Aufgabe 52.19. (5 Punkte)

Sei

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^y.$$

Man fertige Skizzen für den (1) Graph und (2) die Fasern und die Tangentialräume dieser Abbildung an.