Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 79

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 79.1. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

eine Karte (also $U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen). Zeige, dass α ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 79.2. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine Abbildung. Es sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von M. Zeige, dass φ genau dann differenzierbar ist, wenn alle Einschränkungen $\varphi_i = \varphi|_{U_i}$ differenzierbar sind.

Aufgabe 79.3. Zeige, dass zu $m \leq n$ die Einbettung des Unterraumes $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$, die durch $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ gegeben ist, beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 79.4. Man gebe ein Beispiel einer abgeschlossenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, die keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 79.5. Es seien M und N zwei disjunkte abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass deren Vereinigung $M \cup N$ ebenfalls eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist, und dass diese Aussage ohne die Voraussetzung der Disjunktheit nicht gilt.

Aufgabe 79.6. Es sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass der Graph $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Aufgabe 79.7. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

das Tangentialbündel. Zeige, dass diese Projektionsabbildung stetig ist.

Aufgabe 79.8. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei $\varphi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi) : TM \longrightarrow TN$$

stetig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 79.9. (8 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$.

a) Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 |\, ux^m + vy^n = 1\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, u, v) \longmapsto (x, y),$$

differenzierbar und in jedem Punkt $P \in M$ regulär ist.

c) Beschreibe die Fasern von φ.

Aufgabe 79.10. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto (x^2, x^3).$$

a) Zeige, dass diese Abbildung differenzierbar und injektiv ist.

b) Zeige, dass φ nicht in jedem Punkt regulär ist.

c) Zeige, dass das Bild von φ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist, aber keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 79.11. (4 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine differenzierbare Abbildung und M die Faser über $0 \in \mathbb{R}^m$. Es sei vorausgesetzt, dass das totale Differential in jedem Punkt dieser Faser surjektiv sei. Zeige, dass für $P \in M$ der Tangentialraum im Sinne von Definition 51.5 mit dem Tangentialraum der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M im Punkt P übereinstimmt.

Aufgabe 79.12. (5 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

das Tangentialbündel. Zeige, dass TM selbst in natürlicher Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist