Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen

Im Folgenden wollen wir den Zusammenhang zwischen Richtungsableitungen, partiellen Ableitungen und dem totalen Differential verstehen.

Totale Differenzierbarkeit impliziert richtungsweise Differenzierbarkeit.

PROPOSITION 45.1. *Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $\varphi : G \to W$ eine im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ in P in jede Richtung v differenzierbar, und es gilt*

$$(D_v\varphi)_P = (D\varphi)_P(v)\,.$$

Beweis. Da $(D\varphi)_P$ eine lineare Abbildung von V nach W ist, liefert die Anwendung dieser Abbildung auf einen Vektor $v \in V$ einen Vektor in $(D\varphi)_P(v) \in W$. Nach Voraussetzung haben wir

$$\varphi(P+v) = \varphi(P) + (D\varphi)_P(v) + \|\, v \,\| \cdot r(v)$$

(mit den üblichen Bedingungen an r). Insbesondere gilt für (hinreichend kleines) $s \in \mathbb{K}$

$$\varphi(P+sv) = \varphi(P) + s(D\varphi)_P(v) + |\, s \,| \cdot \|\, v \,\| \cdot r(sv)\,.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{\varphi(P+sv)-\varphi(P)}{s} &= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{s(D\varphi)_P(v) + |\, s \,| \cdot \|\, v \,\| \cdot r(sv)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \left((D\varphi)_P(v) + \frac{|\, s \,|}{s} \|\, v \,\| \cdot r(sv) \right) \\
&= (D\varphi)_P(v),
\end{aligned}$$

da $\lim_{s\to 0} r(sv) = 0$ und der Ausdruck $\frac{|s|}{s} \|\, v \,\|$ beschränkt ist. ☐

Vor dem Beweis der nächsten Aussage erinnern wir an den Mittelwertsatz für Kurven: Sei $h : [a,b] \to \mathbb{K}^n$ differenzierbar. Dann existiert ein $c \in [a,b]$ mit

$$\|\, h(b) - h(a) \,\| \leq (b-a) \,\|\, h'(c) \,\|\ .$$

SATZ 45.2. *Sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $\varphi : G \to \mathbb{K}^m$ eine Abbildung. Seien x_i, $i = 1, \ldots, n$, die Koordinaten von $\mathbb{K}^n$ und $P \in G$ ein Punkt. Es sei angenommen, dass alle partiellen Ableitungen in einer offenen Umgebung von P existieren und in P stetig sind. Dann ist φ in P (total) differenzierbar. Ist die Abbildung φ bezüglich einer Basis des $\mathbb{K}^m$ durch die Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ gegeben, so wird unter diesen Bedingungen das totale Differential in P durch die Jacobi-Matrix*

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$$

beschrieben.

Beweis. Indem wir G durch eine eventuell kleinere offene Umgebung von P ersetzen, können wir annehmen, dass auf G die Richtungsableitungen

$$Q \longmapsto (D_i\varphi)(Q) := (D_{e_i}\varphi)_Q = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(Q), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(Q)) \in \mathbb{K}^m$$

existieren und in P stetig sind. Daher ist nach Fakt ** die lineare Abbildung

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m,\, v = (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i (D_i\varphi)(P),$$

der einzige Kandidat für das totale Differential. Daher müssen wir zeigen, dass diese lineare Abbildung die definierenden Eigenschaft des totalen Differentials besitzt. Setze $P_i = P + v_1e_1 + \ldots + v_ie_i$ (abhängig von v). Dann gelten mit dem Ansatz

$$r(v) \;=\; \frac{\varphi(P+v) - \varphi(P) - \sum_{i=1}^{n} v_i(D_i(\varphi))(P)}{||\, v\, ||}$$

(für v hinreichend klein) die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
||\, r(v)\, || \;&=\; \frac{||\, \varphi(P+v) - \varphi(P) - \sum_{i=1}^{n} v_i(D_i(\varphi))(P)\, ||}{||\, v\, ||} \\
&=\; \frac{||\, \sum_{i=1}^{n} (\varphi(P_i) - \varphi(P_{i-1}) - v_i(D_i(\varphi))(P))\, ||}{||\, v\, ||} \\
&\leq\; \sum_{i=1}^{n} \frac{||\, \varphi(P_i) - \varphi(P_{i-1}) - v_i(D_i(\varphi))(P)\, ||}{||\, v\, ||} \\
&=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{||\, \varphi(P_{i-1} + v_ie_i) - \varphi(P_{i-1}) - v_i(D_i(\varphi))(P)\, ||}{||\, v\, ||}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten jeden Summanden einzeln. Für fixiertes i ist die Abbildung (die auf dem Einheitsintervall definiert ist)

$$h_i : s \longmapsto \varphi(P_{i-1} + sv_ie_i) - sv_i(D_i(\varphi))(P)$$

differenzierbar (aufgrund der Existenz der partiellen Ableitungen auf G) mit dem Differential

$$s \longmapsto v_i(D_i(\varphi))(P_{i-1} + sv_ie_i) - v_i(D_i(\varphi))(P)\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert eine reelle Zahl $0 \leq c_i \leq 1$, so dass (dies ist die Norm von $h_i(1) - h_i(0)$)

$$\begin{aligned}
||\, \varphi(P_{i-1} + v_ie_i) - \varphi(P_{i-1}) - v_i(D_i(\varphi))(P)\, || \;&\leq\; ||\, v_i(D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_iv_ie_i) - v_i(D_i(\varphi))(P)\, || \\
&=\; |\, v_i\, | \cdot ||\, (D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_iv_ie_i) - (D_i(\varphi))(P)\, || \\
&\leq\; ||\, v\, || \cdot ||\, (D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_iv_ie_i) - (D_i(\varphi))(P)\, ||
\end{aligned}$$

gilt. Aufsummieren liefert also, dass unser Ausdruck $||\; r(v)\; ||$ nach oben beschränkt ist durch

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{||\, v\, || \cdot ||\, (D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_iv_ie_i) - (D_i(\varphi))(P)\, ||}{||\, v\, ||} \;\leq\; n \cdot \sum_{i=1}^{n} ||\, (D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_iv_ie_i) - (D_i(\varphi))(P)\, ||$$

Da die partiellen Ableitungen $D_i(\varphi)$ stetig in P sind, wird die Summe rechts mit v beliebig klein. Also ist der Grenzwert für $v \rightarrow 0$ gleich 0. $\square$

KOROLLAR 45.3. *Polynomfunktionen sind total differenzierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 44.10 und daraus, dass die partiellen Ableitungen von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen und daher stetig sind. $\square$

Zu einer reellwertigen Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

interessieren wir uns wie schon bei einem eindimensionalen Definitionsbereich für die Extrema, also Maxima und Minima, der Funktion, und inwiefern man dies anhand der Ableitungen (falls diese existieren) erkennen kann. Wenn eine solche Funktion total differenzierbar ist, so ist das totale Differential i neinem Punkt eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{K}$. Für solche linearen Abbildungen gibt es einen eigenen Namen.

DEFINITION 45.4. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow K$$

heißt auch eine *Linearform* auf V.

DEFINITION 45.5. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt der Homomorphismenraum

$$V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$$

der *Dualraum* zu V.

Wenn $G \subseteq \mathbb{K}^n$ ist, so bilden die partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in G$ eine Matrix mit einer einzigen Zeile, die bei stetigen partiellen Ableitungen das totale Differential repräsentiert. Eine solche Matrix kann man aber ebenso auch als ein n-Tupel in $\mathbb{K}$ und damit als einen Vektor in $\mathbb{K}^n$ auffassen. Dieser Zusammenhang zwischen Vektoren und Linearformen beruht auf dem Standardskalarprodukt des $\mathbb{K}^n$, und lässt sich konzeptioneller mit Hilfe von Bilinearformen erfassen. Bilinearformen haben wir in Zusammenhang mit multilinearen Abbildungen und Skalarprodukten kennengelernt, sie sind spezielle multilineare Abbildungen.

DEFINITION 45.6. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K,\ (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *Bilinearform*, wenn für alle $v \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\ w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle $w \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\ v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

K-linear sind.

Eine wichtige Eigenschaft von Bilinearformen, die Skalarprodukte erfüllen, wird in der nächsten Definition formuliert.

Definition 45.7. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine Bilinearform

$$V \times V \longrightarrow K,\ (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *nicht ausgeartet*, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$, die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\ w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle $w \in V$, $w \neq 0$, die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\ v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

nicht die Nullabbildung sind.

In der nächsten Vorlesung werden wir für Vektorräume, auf denen eine nicht-ausgeartete Bilinearform gegeben ist, eine bijektive Beziehung zwischen Vektoren und Linearformen beweisen und damit einen Zusammenhang zwischen dem totalen Differential zu einer Funktion in einem Punkt und einem Vektor, dem sogenannten Gradienten der Funktion in diesem Punkt, herstellen.

Definition 45.8. Zu einer Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei G ein metrischer Raum sei, nennt man zu $c \in \mathbb{K}$ die Menge

$$N_c = \{x \in G \mid f(x) = c\}$$

die *Niveaumenge* zu f zum Wert c.

Abbildungsverzeichnis