Universität Osnabrück
Vorlesung *Algebraische Kurven* 2008/2009
Prof. Dr. Holger Brenner
Arbeitsblatt 27

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Zeige, dass zwei verschiedene Punkte P und Q in der projektiven Ebene eindeutig eine projektive Gerade definieren, auf der beide Punkte liegen. Wie berechnet man die Geradengleichung aus den Koordinaten der Punkte?

Bestimme die homogene Geradengleichung für die beiden Punkte $(2, 3, 7)$ und $(1, 5, -2)$.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Definiere eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{A}_K^{n+1} - \{0\}$ derart, dass der Quotient unter der Äquivalenzrelation der projektive n-dimensionale Raum ist.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Berechne auf zwei verschiedene Arten, wie viele Elemente der projektive Raum $\mathbb{P}_K^n$ besitzt.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Man definiere den Begriff *projektiv-linearer Unterraum* eines projektiven Raumes $\mathbb{P}_K^n$.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}_K^n$ ein projektiver Raum der Dimension n und es seien $X, Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ projektiv-lineare Unterräume der Dimension r und s. Es sei $r + s \geq n$. Zeige, dass dann $X \cap Y \neq \emptyset$ ist.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein homogenes Ideal ist genau dann, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und sei $P_1, \ldots, P_m$ eine endliche Ansammlung von Punkten in einem projektiven Raum $\mathbb{P}_K^n$. Dann gibt es eine homogene Linearform $X \in K[X_0, \ldots, X_n]$ derart, dass all diese Punkte auf der durch X definierten offenen Teilmenge $D_+(X)$ liegen.

Die folgenden drei Aufgaben besprechen die Zariski-Topologie auf den projektiven Räumen.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum wirklich eine Topologie ist.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der projektive Raum. Charakterisiere die homogenen Ideale $\mathfrak{a}$, für die $D_+(\mathfrak{a}) = \emptyset$ ist.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass der projektive Raum $\mathbb{P}^n_K$ irreduzibel ist.

Die folgende Aufgabe benötigt noch die folgende Definition:

Für ein homogenes Ideal I in $R = A[X_0, \ldots, X_n]$ mit Standardgraduierung definiert man die *Sättigung* (oder *Saturierung*) von I als

$$\{r \in R \,|\, \text{es existiert ein } n \text{ mit } r(R_+)^n \subseteq I\}\,.$$

Dabei ist R_+ das *irrelevante Ideal* $\bigoplus_{d \geq 1} R_d = (X_0, \ldots, X_n)$.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und $R = A[X_0, \ldots, X_n]$ der Polynomring mit der Standardgraduierung. Zeigen Sie, dass die Sättigung eines homogenen Ideals I wieder ein homogenes Ideal ist.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal mit Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal, dass unter der Lokalisierungsabbildung zum Kern gehört. Zeige, dass dann $R_\mathfrak{m}$ auch eine Lokalisierung von $R/\mathfrak{a}$ ist.