Fachbereich Mathematik/Informatik **18. Dezember 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik II

Nachklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt (siehe aber den Anhang).

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkäre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer per Aushang oder im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	3	9	4	6	4	6	8	8	8	64
erhalt. Pkt.:												

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *obere* Treppenfunktion zu einer Funktion
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(2) Das *totale Differential* in einem Punkt $P \in V$ einer in diesem Punkt total differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
(dabei seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume).
(3) Der *Tangentialraum* an die Faser durch einen Punkt $P \in V$ einer total differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
mit einem surjektiven totalen Differential (dabei seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume).
(4) Ein *Vektorfeld* auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ in einem reellen Vektorraum V.
(5) Eine *Bilinearform* $\langle -, - \rangle$ auf einem K-Vektorraum V.
(6) Die *Gramsche Matrix* zu einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem K-Vektorraum V bzgl. einer Basis $v_1, \ldots, v_n$.
(7) Der *Dualraum* eines K-Vektorraumes V.
(8) Eine *trigonalisierbare* lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ (V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum).

Lösung

(1) Eine Treppenfunktion
$$t : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt eine *obere Treppenfunktion* zu f, wenn $t(x) \geq f(x)$ ist für alle $x \in I$.
(2) Die lineare Abbildung L mit der Eigenschaft
$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + ||\, v \,||\; r(v)$$
(wobei $r : U(0, \delta) \to W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist) heißt das totale Differential von φ an der Stelle P.
(3) Es sei Y die Faser von φ durch P. Dann nennt man
$$T_P Y := \operatorname{kern} (D\varphi)_P = \{v \,|\, (D\varphi)_P(v) = 0\}$$
den *Tangentialraum* an die Faser Y in P.

(4) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Dann nennt man eine Abbildung
$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$
ein *Vektorfeld* auf U.

(5) Eine Abbildung
$$V \times V \longrightarrow K,\ (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle,$$
heißt *Bilinearform*, wenn für alle $v \in V$ die induzierten Abbildungen
$$V \longrightarrow K,\ w \longmapsto \langle v, w\rangle,$$
und für alle $w \in V$ die induzierten Abbildungen
$$V \longrightarrow K,\ v \longmapsto \langle v, w\rangle,$$
K-linear sind.

(6) Die $n \times n$-Matrix
$$\langle v_i, v_j\rangle_{1 \leq i,j \leq n}$$
heißt die *Gramsche Matrix* von $\langle -, -\rangle$ bzgl. der Basis $v_1, \ldots, v_v$.

(7) Der Homomorphismenraum
$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$$
heißt der *Dualraum* zu V.

(8) Die Abbildung φ heißt *trigonalisierbar*, wenn V eine φ-invariante Fahne besitzt.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung.*
(2) Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.*
(3) Der *Satz von Schwarz.*
(4) Die *Charakterisierung der Trigonalisierbarkeit* einer linearen Abbildung mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

Lösung

(1) Sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und sei
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit
$$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b - a)\,.$$
(2) Sei I ein reelles Intervall und sei
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei
$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$
die zugehörige Integralfunktion. Dann ist F differenzierbar und es gilt
$$F'(x) = f(x)$$
für alle $x \in I$.
(3) Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume. Sei $G \subseteq V$ offen und $\varphi : G \to W$ eine Abbildung, so dass für $u, v \in V$ die zweiten Richtungsableitungen $D_v D_u \varphi$ und $D_u D_v \varphi$ existieren und stetig sind. Dann gilt
$$D_v D_u \varphi = D_u D_v \varphi\,.$$
(4) Eine lineare Abbildung φ ist trigonalisierbar genau dann, wenn das charakteristische Polynom χ_φ in Linearfaktoren zerfällt.

AUFGABE 3. (3 Punkte)
Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

Lösung

Eine Stammfunktion zu f ist

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ \ln(2x+3) + e^{-x}\,.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x)\,dx &= F(4) - F(1)\\ &= \frac{16}{3} - 4 + \frac{1}{2}\ \ln\ 11 + e^{-4} - \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{2}\ \ln\ 5 - e^{-1}\\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\ \ln\ \frac{11}{5} + e^{-4} - e^{-1}.\end{aligned}$$

AUFGABE 4. (9 (6+3) Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.

b) Bestimme eine Stammfunktion von f für $x > 1$.

Lösung

a) Zunächst ist

$$(x-1)^2(x^2+1) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$$

Polynomdivision des Zählers durch den Nenner ergibt

$$x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) + 5x^3 - 4x^2 + 4x - 3.$$

Daher ist

$$\frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = x + 2 + \frac{5x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}.$$

Für den rechten Bruch bestimmen wir die Partialbruchzerlegung über den Ansatz

$$\frac{5x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx + d}{(x^2+1)},$$

der wiederum auf

$$5x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = a(x-1)(x^2+1) + b(x^2+1) + (cx+d)(x-1)^2$$

führt.

Für $x = 1$ ergibt sich

$$2 = 2b,$$

also $b = 1$.

Für $x = 0$ ergibt sich

$$-3 = -a + 1 + d,$$

also $4 = a - d$.

Für $x = -1$ ergibt sich

$$-5 - 4 - 4 - 3 = -16 = -4a + 2 + 4(-c + d),$$

also $\frac{18}{4} = a + c - d$.

Der Koeffizient zu x^3 führt schließlich auf

$$5 = a + c.$$

Die Addition der zweiten und dritten Gleichung führt auf

$$c = -3 - 1 + \frac{18}{4} = \frac{1}{2}.$$

Aus der vierten Gleichung folgt daraus $a = \frac{9}{2}$ und aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$d = \frac{1}{2}.$$

Somit ergibt sich insgesamt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = x + 2 + \frac{\frac{9}{2}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{(x^2+1)}.$$

b) Eine Stammfunktion von f ist

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2} \ln(x-1) - (x-1)^{-1} + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x\,.$$

AUFGABE 5. (4 Punkte)
Es sei
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
eine stetig differenzierbare Kurve und sei
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
eine lineare Isometrie. Beweise die Längengleichheit
$$L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma)\,.$$

Lösung

Für eine stetig differenzierbare Kurve
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
gilt
$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)|| \; dt\,.$$
Die Kurve $\varphi \circ \gamma$ ist ebenfalls stetig differenzierbar, und nach der Kettenregel gilt
$$(\varphi \circ \gamma)'(t) \;=\; (D\varphi)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \;=\; \varphi(\gamma'(t)),$$
da φ linear ist. Da φ eine Isometrie ist, stimmt die Norm von $\gamma'(t)$ mit der Norm von $\varphi(\gamma'(t))$ überein. Daher ist
$$L(\varphi \circ \gamma) \;=\; \int_a^b ||(\varphi \circ \gamma)'(t)|| \; dt \;=\; \int_a^b ||\gamma'(t)|| \; dt \;=\; L(\gamma).$$

AUFGABE 6. (6 (2+2+2) Punkte)
Wir betrachten die Abbildung
$\varphi : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $(a,b,c,d,u,v) \longmapsto (au+bv+c+d, ad-bc, ac-b^2, bd-c^2)$.

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.

b) Zeige, dass φ im Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Zeige, dass φ in $(1,1,0,0,1,1)$ regulär ist.

Lösung

a) Die Jacobi-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} u & v & 1 & 1 & a & b \\ d & -c & -b & a & 0 & 0 \\ c & -2b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & -2c & b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Jacobi-Matrix im Nullpunkt ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat den Rang 1, so dass der Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Die Jacobi-Matrix in $(1,1,0,0,1,1)$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinate der vorderen 4×4-Untermatrix ist $1 \cdot (-1)(-2)(-1)1 = -2 \neq 0$, so dass die ersten vier Spaltenvektoren linear unabhängig sind und daher der Rang der Matrix gleich 4 ist. Daher handelt es sich um einen regulären Punkt.

AUFGABE 7. (4 Punkte)
Untersuche die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + xy - 6y^2 - y,$$
auf kritische Punkte und Extrema.

Lösung

Die partiellen Ableitungen der Funktion f sind
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$$
und
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 6y - 1.$$
Eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines lokalen Extremums ist, dass der Gradient 0 ist. Aus
$$2x + y = 0 \text{ und } x - 6y - 1 = 0$$
folgt sofort
$$-13y - 2 = 0\,,$$
also $y = -\frac{2}{13}$ und daraus
$$x = \frac{1}{13}\,.$$
Es kann also allenfalls im kritischen Punkt $P = (\frac{1}{13}, \frac{-2}{13})$ ein lokales Extremum vorliegen. Die Hesse-Matrix der Funktion ist
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$
Der Eintrag links oben ist also positiv und die Determinante ist negativ. Daher ist die Hesse-Matrix indefinit und somit liegt kein Extremum vor.

AUFGABE 8. (6 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Lösung

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

die stetige Funktion. Über dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b - a)\,.$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\, dt = d(b - a)$ mit einem $d \in [m, M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$.

AUFGABE 9. (8 Punkte)

Beweise den Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer linearen surjektiven Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m .$$

Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt?

Lösung

Es ist $G = \mathbb{R}^n$ und $P \in \mathbb{R}^n$ sei ein beliebiger Punkt. Bei einer linearen Abbildung stimmt das totale Differential mit der linearen Abbildung überein. Da diese nach Voraussetzung surjektiv ist, sind die Voraussetzungen des Satzes für jeden Punkt erfüllt. Ferner folgt $n \geq m$ aus der Surjektivität. Es sei $L = \operatorname{kern} \varphi$ der Kern der linearen Abbildung, der nach dem Dimensionssatz die Dimension $n-m$ besitzt. Daher gibt es eine lineare Isomorphie $\mathbb{R}^{n-m} \cong L$, die eine lineare injektive Abbildung $\theta : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ definiert.

Die Faser Z durch P, also das Urbild von $\varphi(P)$, ist die Teilmenge

$$P + L = \{P + v |\, v \in L\}$$

und ergibt sich daher aus dem Kern durch verschieben um P. Insgesamt erhalten wir

$$\psi : V = \mathbb{R}^{n-m} \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}^n \xrightarrow{+P} \mathbb{R}^n = W \,,$$

wobei vorne eine lineare injektive Abbildung (deren Bild gleich L ist) und hinten eine Verschiebung steht. Daher ist die Abbildung ψ stetig differenzierbar und injektiv. Das Bild von ψ ist nach der Vorüberlegung genau Z, so dass eine Bijektion $\mathbb{R}^{n-m} \cong Z$ vorliegt.

Als Verknüpfung einer linearen Einbettung und einer Verschiebung ist ψ in jedem Punkt regulär. Das totale Differential von ψ ist θ, da das totale Differential einer Verschiebung die Identität ist. Wegen $\varphi \circ \theta = 0$ gilt auch der Zusatz.

AUFGABE 10. (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welche $x, y \in [0,1]$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt. Welchen Wert besitzt er?

Lösung

Es seien $0 \leq x \leq y \leq 1$ die Markierungen der möglichen Intervallunterteilungen. Der Flächeninhalt der zugehörigen maximalen unteren Treppenfunktion von f ist

$$\begin{aligned} g(x,y) &= x(1-x^2) + (y-x)(1-y^2) \\ &= x - x^3 + y - y^3 - x + xy^2 \\ &= -x^3 - y^3 + xy^2 + y. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen davon sind

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -3x^2 + y^2 \text{ und } \frac{\partial g}{\partial y} = -3y^2 + 2xy + 1\,.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte. Aus der ersten Gleichung folgt

$$y = \sqrt{3}x$$

(den negativen Fall kann man ausschließen). Wir setzen $x = \frac{1}{\sqrt{3}}y$ in die zweite Gleichung ein und erhalten die Bedingung

$$-1 = -3y^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}y^2 = \frac{-3\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}y^2,$$

woraus

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2}$$

folgt. Daher ist

$$x = \frac{1}{3\sqrt{3}-2}$$

und der einzige kritische Punkt ist

$$\left(\frac{1}{3\sqrt{3}-2}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2}\right).$$

Die Hesse-Matrix von g ist

$$\begin{pmatrix} -6x & 2y \\ 2y & -6y+2x \end{pmatrix}.$$

Im kritischen Punkt ist der Eintrag links oben negativ. Die Determinante ist

$$36xy - 12x^2 - 4y^2 \;=\; (\frac{1}{3\sqrt{3}-2})^2(36\sqrt{3} - 12 - 12) \;>\; 0$$

positiv, so dass die Hesse-Matrix negativ definit ist und daher im kritischen Punkt ein Maximum vorliegt. Da es auch in einer geeigneten (kleinen) offenen Umgebung des abgeschlossenen Definitionsbereiches keinen weiteren kritischen Punkt gibt, liegt ein absolutes Maximum vor. Der Wert ist

$$\begin{aligned}
&= -(\frac{1}{3\sqrt{3}-2})^3 - (\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2})^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}-2}(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2})^2 + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2} \\
&= (\frac{1}{3\sqrt{3}-2})^3(-1 - 3\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}(3\sqrt{3}-2)^2) \\
&= (\frac{1}{3\sqrt{3}-2})^3(2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3}(31 - 6\sqrt{3})) \\
&= (\frac{1}{3\sqrt{3}-2})^3(-16 + 28\sqrt{3}) \\
&= \frac{-16 + 28\sqrt{3}}{-170 + 117\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

AUFGABE 11. (8 (5+3) Punkte)

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung

a) Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix. Das charakteristische Polynom davon ist

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) - 6 = \lambda^2 - 6\lambda - 1.$$

Daher sind $3 + \sqrt{10}$ und $3 - \sqrt{10}$ die Eigenwerte, und daher ist die Matrix diagonalisierbar.

Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert $3 + \sqrt{10}$ berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} 2 + \sqrt{10} & -2 \\ -3 & -2 + \sqrt{10} \end{pmatrix} .$$

Dies ergibt den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 - \sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $3 + \sqrt{10}$ und damit die erste Fundamentallösung

$$e^{(3+\sqrt{10})t} \cdot \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert $3-\sqrt{10}$ berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} 2-\sqrt{10} & -2 \\ -3 & -2-\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $3-\sqrt{10}$ und damit die zweite Fundamentallösung

$$e^{(3-\sqrt{10})t}\cdot\begin{pmatrix} 2+\sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung hat demnach die Form

$$ae^{(3+\sqrt{10})t}\cdot\begin{pmatrix} 2-\sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix}+be^{(3-\sqrt{10})t}\cdot\begin{pmatrix} 2+\sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(2-\sqrt{10})e^{(3+\sqrt{10})t}+b(2+\sqrt{10})e^{(3-\sqrt{10})t} \\ -3ae^{(3+\sqrt{10})t}-3be^{(3-\sqrt{10})t} \end{pmatrix}$$

mit $a,b\in\mathbb{R}$.

b) Um das Anfangsproblem zu lösen müssen wir a und b so bestimmen, dass

$$\begin{pmatrix} (2-\sqrt{10})a+(2+\sqrt{10})b \\ -3a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist. Die zweite Gleichung bedeutet $a+b=-1$. Wir addieren das $-\frac{1}{2-\sqrt{10}}$-fache der ersten Zeile zu $a+b=-1$ dazu und erhalten

$$b\Big(1-\frac{2+\sqrt{10}}{2-\sqrt{10}}\Big) = -1+\frac{4}{2-\sqrt{10}} = \frac{2+\sqrt{10}}{2-\sqrt{10}},$$

woraus sich

$$b\frac{-2\sqrt{10}}{2-\sqrt{10}} = \frac{2+\sqrt{10}}{2-\sqrt{10}}$$

und somit

$$b = -\frac{2+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$$

ergibt. Daher ist

$$a = -1-b = -1+\frac{2+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{2-\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\frac{2-\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}e^{(3+\sqrt{10})t}\cdot\begin{pmatrix} 2-\sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix}-\frac{2+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}e^{(3-\sqrt{10})t}\cdot\begin{pmatrix} 2+\sqrt{10} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Anhang

Wir geben hier den Satz über implizite Abbildungen und die Definition einer Isometrie explizit an.

Satz 1. *Sei* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ *und es sei* $Z = \varphi^{-1}(\varphi(P))$ *die Faser durch* P. *Das totale Differential* $(D\varphi)_P$ *sei surjektiv. Dann gibt es eine offene Menge* $P \in W$, $W \subseteq G$, *eine offene Menge* $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ *und eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$\psi : V \longrightarrow W$$

derart, dass $\psi(V) \subseteq Z \cap W$ *ist und* ψ *eine Bijektion*

$$\psi : V \longrightarrow Z \cap W$$

induziert. Die Abbildung ψ *ist in jedem Punkt* $Q \in V$ *regulär und für das totale Differential von* ψ *gilt*

$$(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0 \,.$$

Definition 2. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

auf einem euklidischen Vektorraum V heißt *Isometrie*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle \,.$$