Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 9

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 9.1. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der K-Vektorraum

$$\oplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterring von A ist.

Aufgabe 9.2. Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der K-Vektorraum

$$\oplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterkörper von A ist.

Aufgabe 9.3. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra, die ein Integritätsbereich sei. Zeige, dass die Menge

$$M = \{d \in D |\, A_d \neq 0\}$$

ein Untermonoid von D ist.

Aufgabe 9.4. Sei D eine Gruppe, K ein Körper und $D^\vee = \operatorname{Char}(D, K)$ die Charaktergruppe zu D. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) $D^\vee$ ist eine kommutative Gruppe.
(2) Bei einer direkten Gruppenzerlegung $D = D_1 \times D_2$ ist $(D_1 \times D_2)^\vee = D_1^\vee \times D_2^\vee$.

Aufgabe 9.5. Sei D eine endliche Gruppe, K ein Körper und $\chi \in D^\vee = \operatorname{Char}(D, K)$ ein Charakter. Zeige, dass $\chi(d)$ für jedes $d \in D$ eine Einheitswurzel in K ist.

Vor der nächsten Aufgabe erwähnen wir die folgende Definition.

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Ein K-Automorphismus

$$\varphi : A \longrightarrow A$$

heißt *homogen*, wenn für jedes homogene Element $a \in A_d$ gilt $\varphi(a) \in A_d$.

Aufgabe 9.6. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Zeige, dass der in Lemma 9.11 zu einem Charakter $\chi \in D^\vee$ eingeführte Automorphismus

$$\varphi_\chi : A \longrightarrow A$$

homogen ist.

Aufgabe 9.7. Es sei G die Menge der stetigen geraden Funktionen und U die Menge der stetigen ungeraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = G \oplus U$$

eine $\mathbb{Z}/(2)$-graduierte $\mathbb{R}$-Algebra ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.8. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X,Y]$ ein homogenes Polynom. Zeige: F zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 9.9. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Es sei

$$\varphi : A \longrightarrow A$$

ein homogener Automorphismus. Zeige, dass es einen Charakter $\chi \in D^\vee$ gibt mit $\varphi = \varphi_\chi$, wobei φ_χ der gemäß Lemma 9.11 zu χ gehörige Automorphismus ist.

Aufgabe 9.10. (3 Punkte)

Zeige, dass man $\sqrt{3}$ nicht als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von 1 und $\sqrt{2}$ schreiben kann.

Aufgabe 9.11. (4 Punkte)

Betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] = L\,.$$

Zeige, dass einerseits $1, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{35}$ und andererseits $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^i$, $i = 0, 1, 2, 3$, eine $\mathbb{Q}$-Basis von L bildet. Berechne die Übergangsmatrizen für diese Basen.

Aufgabe 9.12. (5 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine stetige Funtion

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Für alle n- ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Abbildungsverzeichnis