

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 9

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 9.1. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte K -Algebra. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der K -Vektorraum

$$\bigoplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterring von A ist.

AUFGABE 9.2. Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D -graduierte Körpererweiterung. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der K -Vektorraum

$$\bigoplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterkörper von A ist.

AUFGABE 9.3. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte K -Algebra, die ein Integritätsbereich sei. Zeige, dass die Menge

$$M = \{d \in D \mid A_d \neq 0\}$$

ein Untermonoid von D ist.

AUFGABE 9.4. (Punkte)

Sei D eine Gruppe, K ein Körper und $D^\vee = \text{Char}(D, K)$ die Charaktergruppe zu D . Beweise die folgenden Aussagen.

- (1) D^\vee ist eine kommutative Gruppe.
- (2) Bei einer direkten Gruppenzerlegung $D = D_1 \times D_2$ ist $(D_1 \times D_2)^\vee = D_1^\vee \times D_2^\vee$.

AUFGABE 9.5. Sei D eine endliche Gruppe, K ein Körper und $\chi \in D^\vee = \text{Char}(D, K)$ ein Charakter. Zeige, dass $\chi(d)$ für jedes $d \in D$ eine Einheitswurzel in K ist.

Vor der nächsten Aufgabe erwähnen wir die folgende Definition.

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte K -Algebra. Ein K -Automorphismus

$$\varphi : A \longrightarrow A$$

heißt *homogen*, wenn für jedes homogene Element $a \in A_d$ gilt $\varphi(a) \in A_d$.

AUFGABE 9.6. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte K -Algebra. Zeige, dass der in Lemma 9.11 zu einem Charakter $\chi \in D^\vee$ eingeführte Automorphismus

$$\varphi_\chi : A \longrightarrow A$$

homogen ist.

AUFGABE 9.7. Es sei G die Menge der stetigen geraden Funktionen und U die Menge der stetigen ungeraden Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Zeige, dass

$$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = G \oplus U$$

eine $\mathbb{Z}/(2)$ -graduierte \mathbb{R} -Algebra ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 9.8. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein homogenes Polynom. Zeige: F zerfällt in Linearfaktoren.

AUFGABE 9.9. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte K -Algebra. Es sei

$$\varphi : A \longrightarrow A$$

ein homogener Automorphismus. Zeige, dass es einen Charakter $\chi \in D^\vee$ gibt mit $\varphi = \varphi_\chi$, wobei φ_χ der gemäß Lemma 9.11 zu χ gehörige Automorphismus ist.

AUFGABE 9.10. (3 Punkte)

Zeige, dass man $\sqrt{3}$ nicht als \mathbb{Q} -Linearkombination von 1 und $\sqrt{2}$ schreiben kann.

AUFGABE 9.11. (4 Punkte)

Betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] = L.$$

Zeige, dass einerseits $1, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{35}$ und andererseits $(\sqrt{5} + \sqrt{7})^i, i = 0, 1, 2, 3$, eine \mathbb{Q} -Basis von L bildet. Berechne die Übergangsmatrizen für diese Basen.

AUFGABE 9.12. (5 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) Es gibt eine stetige Funktion

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

- (2) Für alle n -ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Abbildungsverzeichnis