Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur 1

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	3	4	3	8	3	4	6	5	3	5	3	5	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

AUFGABE 1.1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *komplexe Konjugation*.
(2) Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.
(3) Eine *lineare* Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(5) Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(6) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(7) Eine *Treppenfunktion* auf einem Intervall $[a, b]$.
(8) Eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen*.

AUFGABE 1.2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Dimensionsformel* für lineare Abbildungen.
(2) Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
(3) Der *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen.
(4) Der *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung.

AUFGABE 1.3. (4 Punkte)

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl
$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$
ein Vielfaches von 43 ist.

AUFGABE 1.4. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor
$$(1, 0, 0)$$
als Linearkombination der Vektoren
$$(1, -2, 5), (4, 0, 3) \text{ und } (2, 1, 1)$$
aus.

Aufgabe 1.5. (4 Punkte)
Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.6. (3 Punkte)
Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 1.7. (8 Punkte)
Es sei V ein Vektorraum und

$$v_1, \ldots, v_n$$

eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Familie genau dann eine Basis von V bildet, wenn es sich um ein minimales Erzeugendensystem handelt (d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor).

Aufgabe 1.8. (3 Punkte)
Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 1.9. (4 Punkte)
Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 1.10. (6 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 1.11. (5 Punkte)
Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 1.12. (3 Punkte)
Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 1.13. (5 Punkte)
Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 1.14. (3 Punkte)
Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x\,,$$

über $[-1, 0]$.

Aufgabe 1.15. (5 Punkte)

Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.