

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Multipliziere in $\mathbb{Z}[x, y, z]$ die beiden Polynome

$$x^5 + 3x^2y^2 - xyz^3 \text{ und } 2x^3yz + z^2 + 5xy^2z - x^2y.$$

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Multipliziere in $\mathbb{Z}/(5)[x, y]$ die beiden Polynome

$$x^4 + 2x^2y^2 - xy^3 + 2y^3 \text{ und } x^4y + 4x^2y + 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^2.$$

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $R[X]$ der Polynomring über R . Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Führen Sie in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6.$$

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(3)[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 4.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeige, dass folgende beide Eigenschaften äquivalent sind:

- (1) K ist algebraisch abgeschlossen.
- (2) Jedes nicht-konstante Polynom $F \in K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

2

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.