Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 24

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 24.1. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $\alpha = \frac{360}{n}$. Betrachte die Untergruppe der Drehmatrizen

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^j \mid j = 0, \ldots, n-1 \right\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) .$$

Zeige, dass diese Gruppe, aufgefasst in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, konjugiert zu Z_n aus Beispiel 23.1 ist.

Aufgabe 24.2. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe über einem Körper K und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige

$$K[X_1, \ldots, X_n]^G = K[X_1, \ldots, X_n] \cap L[X_1, \ldots, X_n]^G.$$

Aufgabe 24.3. Betrachte die Untergruppe der Drehmatrizen, die durch die Vierteldrehung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Bestimme den reellen und den komplexen Invariantenring zur zugehörigen linearen Operation.

Aufgabe 24.4. Bestimme zu einer speziellen unitären Matrix

$$\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$$

die Eigenwerte und die Eigenvektoren.

Aufgabe 24.5. Zeige, dass zu einer speziellen unitären Matrix

$$\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$$

die beiden Eigenvektoren, aufgefasst in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$, antipodal sind.

Aufgabe 24.6. Zeige, dass zu einer diagonalisierbaren Matrix

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

die beiden Eigenvektoren, aufgefasst in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$, nicht antipodal sein müssen.

Aufgabe 24.7. Überprüfe, dass die in Vorlesung 24 angegebenen Abbildungen eine Homöomorphie zwischen $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und S^2 stiften.

Aufgabe 24.8. Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge M operiere, und es sei $\psi\colon M \to N$ eine Bijektion. Zeige, dass dann auch eine natürliche Operation von G auf N vorliegt.

Aufgabe 24.9. Es sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine spezielle lineare Matrix mit der zugehörigen Abbildung

$$\varphi\colon\, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2 .$$

Zeige, dass φ keine längentreue Abbildung und nicht zu einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ fortsetzbar sein muss.

Aufgabe 24.10. Seien a, b, c, d reelle Zahlen mit

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \,=\, 1 .$$

Zeige, das die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(-ad+bc) & 2(ac+bd) \\ 2(ad+bc) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(-ab+cd) \\ 2(-ac+bd) & 2(ab+cd) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

gleich 1 ist.

Aufgabe 24.11. Zeige, dass sich jede lineare Isometrie des $\mathbb{R}^3$ als Verknüpfung von Drehungen um die drei Koordinantenachsen realisieren lässt.

Aufgabe 24.12. Zeige, dass man die Kleinsche Vierergruppe nicht als Untergruppe der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, wohl aber als Untergruppe der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ realisieren kann.

Aufgabe 24.13. Man gebe ein Beispiel von zwei endlichen Untergruppen $G, H \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, die zueinander isomorph, aber nicht zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 24.14. Man gebe ein Beispiel von zwei endlichen Untergruppen $G, H \subseteq \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, die zueinander isomorph, aber nicht zueinander konjugiert sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.15. (10 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 23.2, Beispiel 23.3, Beispiel 23.4 und Beispiel 23.5 beschriebenen Gruppen unter dem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

die Urbildgruppen der entsprechenden reellen Gruppen sind.