

## Algebraische Kurven

### Arbeitsblatt 20

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 20.1. Sei  $K$  ein Körper und sei  $R_i \subseteq K$ ,  $i \in I$ , eine Familie von normalen Unterringen. Zeige, dass auch der Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} R_i$  normal ist.

AUFGABE 20.2. Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Zeige, dass  $R$  genau dann normal ist, wenn er mit seiner Normalisierung übereinstimmt.

AUFGABE 20.3. Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Sei angenommen, dass die Normalisierung von  $R$  gleich dem Quotientenkörper  $Q(R)$  ist. Zeige, dass dann  $R$  selbst schon ein Körper ist.

AUFGABE 20.4.\*

Sei  $R$  ein normaler Integritätsbereich und  $f \in R$ ,  $f \neq 0$ . Zeige, dass die Nenneraufnahme  $R_f$  ebenfalls normal ist.

AUFGABE 20.5. Sei  $R$  ein normaler Integritätsbereich und sei  $S \subseteq R$  ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die Nenneraufnahme  $R_S$  normal ist.

AUFGABE 20.6. Sei  $M$  ein torsionsfreies Monoid. Zeige, dass dann auch die Differenzgruppe  $\Gamma(M)$  torsionsfrei ist.

AUFGABE 20.7. Sei  $M$  ein kommutative Gruppe. Zeige, dass die Torsionsfreiheit von  $M$  äquivalent zu folgender Eigenschaft ist: Aus  $m \in M$  und  $rm = 0$  für ein positives  $r \in \mathbb{N}$  folgt stets  $m = 0$ . Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für ein Monoid nicht gelten muss.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 20.8. (3 Punkte)

Sei  $R$  ein normaler Integritätsbereich und  $R \subseteq S$  eine ganze Ringerweiterung. Sei  $f \in R$ . Zeige, dass für das von  $f$  erzeugte Hauptideal gilt:

$$R \cap (f)S = (f)R.$$

AUFGABE 20.9. (6 Punkte)

Sei  $R$  ein normaler Integritätsbereich. Zeige, dass dann auch der Polynomring  $R[X]$  normal ist.

AUFGABE 20.10. (5 Punkte)

Sei  $R$  ein normaler Integritätsbereich und  $a \in R$ . Es sei vorausgesetzt, dass  $a$  keine Quadratwurzel in  $R$  besitzt. Zeige, dass das Polynom  $X^2 - a$  prim in  $R[X]$  ist. Tipp: Verwende den Quotientenkörper  $Q(R)$ . Warnung: prim muss hier nicht äquivalent zu irreduzibel sein.

AUFGABE 20.11. (4 Punkte)

Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1)  $R$  ist normal
- (2) Für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  ist die Lokalisierung  $R_{\mathfrak{p}}$  normal.
- (3) Für jedes maximale Ideal  $\mathfrak{m}$  ist die Lokalisierung  $R_{\mathfrak{m}}$  normal.

(Man sagt daher, dass normal eine *lokale Eigenschaft* ist.)

AUFGABE 20.12. (2 Punkte)

Sei  $M \subseteq \Gamma(M) \cong \mathbb{Z}^n$  ein Monoid und betrachte die Menge

$$M^* = \{\varphi : \Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \mid \varphi(M) \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Zeige, dass  $M^*$  ein normales Untermonoid von  $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$  ist.

(Dieses Monoid nennt man das *duale Monoid* zu  $M$ .)

AUFGABE 20.13. (3 Punkte)

Betrachte Beispiel 20.11. Welchen Wert haben die drei Erzeuger unter den dort angegebenen Monoidhomomorphismen  $\varphi_1, \varphi_2$  nach  $\mathbb{Z}$ , durch die das Monoid beschrieben werden kann. Bestimme den Kokern des Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z}^2, m \longmapsto (\varphi_1(m), \varphi_2(m)).$$

(Diesen Kokern nennt man die *Divisorenklassengruppe* des Monoidringes.)