Universität Osnabrück
Vorlesung *Algebraische Kurven* 2008
Prof. Dr. Holger Brenner
Arbeitsblatt 18

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Beweise die R-Algebra-Isomorphie

$$R[\mathbb{Z}^n] \cong R[X_1, \ldots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaften von Monoidringen und Nenneraufnahmen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid. Definiere eine Bijektion zwischen den folgenden Objekten.

(1) Filter in M.
(2) $\operatorname{Mor}_{\text{mon}}(M, (\{0,1\}, 1, \cdot))$.
(3) $\mathbb{F}_2 - \operatorname{Spek}(M)$
(4) $\{\varphi \in K - \operatorname{Spek}(K[M]) : \varphi(M) \subseteq \{0,1\}\}$. (Dabei ist K ein Körper.)

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass es in M einen kleinsten Filter gibt und dass dieser eine Gruppe bildet.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei M ein numerisches Monoid. Bestimme die Filter in M.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es sei M ein numerisches Monoid, das durch zwei teilerfremde Elemente $d > e$ erzeugt werde. Bestimme die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führerzahl und den Singularitätsgrad von M.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Bestimme für das numerische Monoid M, das durch $5, 7$ und 9 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führerzahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Bestimme für das numerische Monoid M, das durch $3, 7, 9$ und 11 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führerzahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Seien M, N endlich erzeugte kommutative Monoide mit den K-Spektren $K - \operatorname{Spek}(K[M]) = \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(M, K)$ und $K - \operatorname{Spek}(K[N]) = \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(N, K)$. Zeige, dass man für einen Monoidhomomorphismus $\varphi : M \to N$ die zugehörige Spektrumsabbildung auf zwei verschiedene Weisen definieren kann, die aber inhaltlich übereinstimmen.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien M, N numerische Monoide mit $M \subseteq N$. Zeige, dass die zugehörige Spektrumsabbildung surjektiv ist. Es ist dabei hilfreich, die Aussage 18.6 zu verwenden.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Seien M, N numerische Monoide. Für welche der numerischen Invarianten ν (Multiplizität, Führerzahl, Singularitätsgrad, Einbettungsdimension) folgt aus $M \subseteq N$ die Abschätzung $\nu(M) \geq \nu(N)$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Sei M ein numerisches Monoid, das nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ sei, und sei K ein Körper. Zeige, dass es im Monoidring $K[M]$ irreduzible Elemente gibt, die nicht prim sind. Gebe Elemente aus $K[M]$ mit zwei wesentlich verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Elemente an.