

## Algebraische Kurven

### Arbeitsblatt 13

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 13.1. Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei  $R$  eine reduzierte  $K$ -Algebra von endlichem Typ. Beweise den *Identitätssatz* in der folgenden Gestalt: Wenn für  $f, g \in R$  gilt, dass  $f(P) = g(P)$  ist für alle  $P \in K\text{-Spek}(R)$ , so ist  $f = g$ .

AUFGABE 13.2. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $S \subseteq R$  ein multiplikatives System. Man definiert die *Nenneraufnahme*

$$R_S$$

schrittweise wie folgt. Es sei zunächst  $M$  die Menge der formalen Brüche mit Nenner in  $S$ , also

$$M = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S \right\}.$$

Zeige, dass durch

$$\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \text{ genau dann, wenn es ein } t \in S \text{ gibt mit } trs' = tr's$$

eine Äquivalenzrelation auf  $M$  definiert ist. Wir bezeichnen mit  $R_S$  die Menge der Äquivalenzklassen. Definiere auf  $R_S$  eine Ringstruktur und definiere einen Ringhomomorphismus  $R \rightarrow R_S$ .

In den folgenden Aufgaben dürfen Sie, wenn Sie wollen, bei Nenneraufnahmen annehmen, dass Integritätsbereiche vorliegen.

AUFGABE 13.3. Seien  $R$  und  $A$  kommutative Ringe und sei  $S \subseteq R$  ein multiplikatives System. Es sei  $\varphi : R \rightarrow A$  ein Ringhomomorphismus derart, dass  $\varphi(s)$  eine Einheit in  $A$  ist für alle  $s \in S$ . Zeige: Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : R_S \longrightarrow A,$$

der  $\varphi$  fortsetzt.

AUFGABE 13.4. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $f \in R$  mit zugehöriger Nenneraufnahme  $R_f$ . Beweise die  $R$ -Algebra-Isomorphie

$$R_f \cong R[T]/(Tf - 1).$$

## AUFGABE 13.5.\*

Sei  $K$  ein Körper,  $R = K[X, Y]$  der Polynomring in zwei Variablen,  $S \subseteq R$  ein multiplikatives System und  $F \in R$  ein Polynom. Zeige, dass es eine eindeutige  $R$ -Algebra-Isomorphie

$$(R/(F))_S \cong (R_S)/(F)$$

gibt.

AUFGABE 13.6. Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien  $R$  und  $S$  kommutative  $K$ -Algebren von endlichem Typ. Es sei  $f \in R$  und  $\varphi : R \rightarrow S$  sei ein  $K$ -Algebra-Homomorphismus. Zeige, dass die Spektrumsabbildung  $\varphi^*$  genau dann durch  $D(f)$  faktorisiert, wenn  $\varphi(f)$  eine Einheit in  $S$  ist.

## AUFGABE 13.7.\*

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $R$  eine integre endlich erzeugte  $K$ -Algebra. Es seien  $f, g \in R$ . Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $D(f) \subseteq D(g)$
- (2) Es gibt einen  $R$ -Algebra-Homomorphismus  $R_g \rightarrow R_f$ .

Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für  $K = \mathbb{R}$  nicht gilt.

Die folgende Aufgabe verwendet den Begriff des saturierten multiplikativen Systems.

Ein multiplikatives System  $S$  in einem kommutativen Ring  $R$  heißt *saturiert*, wenn folgendes gilt: Ist  $g \in R$  und gibt es ein  $f \in S$ , das von  $g$  geteilt wird, so ist auch  $g \in S$ .

AUFGABE 13.8. Seien  $A, B$  kommutative Ringe und sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild  $\varphi^{-1}(B^\times)$  der Einheitengruppe ein saturiertes multiplikatives System in  $A$  ist.

AUFGABE 13.9. Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Menge der Nichtnullteiler in  $R$  ein saturiertes multiplikatives System bilden.

## AUFGABE 13.10.\*

Man gebe ein Beispiel einer integren, endlich erzeugten  $\mathbb{C}$ -Algebra  $R$  und eines multiplikativen Systems  $S \subseteq R$ ,  $0 \notin S$ , an derart, dass die Nenneraufnahme  $R_S$  kein Körper ist, aber jedes maximale Ideal aus  $R$  zum Einheitsideal in  $R_S$  wird.

AUFGABE 13.11. Zeige, dass ein Integritätsbereich ein zusammenhängender Ring ist.

AUFGABE 13.12. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $f \in R$ . Es sei  $f$  sowohl nilpotent als auch idempotent. Zeige, dass  $f = 0$  ist.

AUFGABE 13.13. Seien  $R$  und  $S$  kommutative Ringe und sei  $R \times S$  der Produktring  $R \times S$ . Zeige, dass die Teilmenge  $R \times 0$  ein Hauptideal ist.

AUFGABE 13.14. Sei  $X$  ein topologischer Raum, der nicht leer und nicht zusammenhängend sei. Zeige, dass es dann eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \neq 0, 1$ , ( $\mathbb{R}$  sei mit der metrischen Topologie versehen) gibt, die idempotent im Ring der stetigen Funktionen auf  $X$  ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 13.15. (4 Punkte)

Betrachte zwei parallele Geraden  $V$  und das Achsenkreuz  $W$ . Beschreibe eine möglichst natürliche surjektive Abbildung zwischen  $V$  und  $W$  (in welche Richtung?), und zwar sowohl geometrisch als auch algebraisch. Gibt es auch eine surjektive polynomiale Abbildung in die andere Richtung?

AUFGABE 13.16. (6 Punkte)

Betrachte die durch  $Y^2 = X^3 + X^2$  gegebene Kurve  $C$  (siehe Beispiel 6.3) und die offene Menge  $U = D(X) \subseteq C$ . Finde eine abgeschlossene Realisierung von  $U$  in  $\mathbb{A}_K^3$  und zeige, dass es auch eine solche Realisierung in  $\mathbb{A}_K^2$  gibt. Skizziere die Bildkurve unter der Abbildung

$$U \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, (x, y) \longmapsto \left( \frac{1}{x}, y \right).$$

Ist  $U$  isomorph zu einer offenen Menge der affinen Geraden?

AUFGABE 13.17. (3 Punkte)

Bestimme die nilpotenten und die idempotenten Elemente in  $\mathbb{Z}/(175)$ .

## AUFGABE 13.18. (4 Punkte)

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte den Durchschnitt der beiden algebraischen Kurven

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } V(Y - X^2).$$

Identifiziere den Restklassenring

$$R = K[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1, Y - X^2)$$

mit einem Produktring und beschreibe die Restklassenabbildung  $K[X, Y] \rightarrow R$  mittels dieser Identifizierung. Bestimme Urbilder in  $K[X, Y]$  für sämtliche idempotenten Elemente des Produktringes.

## AUFGABE 13.19. (4 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und seien  $P_1, \dots, P_n$  endlich viele Punkte in der affinen Ebene  $\mathbb{A}_K^2$ . Es seien  $a_1, \dots, a_n \in K$  beliebig vorgegebene Werte. Zeige, dass es ein Polynom  $F \in K[X, Y]$  gibt mit  $F(P_i) = a_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .