Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

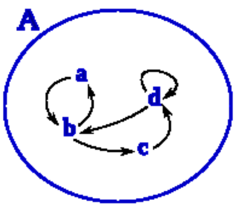
Vorlesung 6

Bevor wir die Gruppentheorie weiter entwickeln und insbesondere die Restklassenbildung sinnvoll behandeln können ist es notwendig, einige grundlegende mengentheoretische Konzepte sich klar zu machen, insbesondere das Konzept der Äquivalenzrelation.

Relationen auf einer Menge

Definition 1. Eine *Relation* R auf einer Menge M ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times M$, also $R \subseteq M \times M$.

Wenn ein Paar (x, y) zu R gehört, so sagt man auch, dass x und y in der Relation R stehen. Statt $(x, y) \in R$ verwendet man häufig suggestivere Schreibweisen wie xRy oder $x \sim y$ oder $x \leq y$. Dabei werden manche Symbole nur verwendet, wenn die Relation gewisse zusätzliche Eigenschaften erfüllt. Die wichtigsten Eigenschaften fasst die folgende Definition zusammen.



Ein Pfeildiagramm ist eine Möglichkeit, eine Relation darzustellen.

Definition 2. Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M. Man nennt R

• *reflexiv*, wenn $(x, x) \in R$ gilt für alle $x \in M$.

• *transitiv*, wenn für beliebige $x, y, z \in M$ aus $(x, y) \in R$ und aus $(y, z) \in R$ stets $(x, z) \in R$ folgt.

• *symmetrisch*, wenn für beliebige $x, y \in M$ aus $(x, y) \in R$ auch $(y, x) \in R$ folgt.

• *antisymmetrisch*, wenn für beliebige $x, y \in M$ aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ die Gleichheit $x = y$ folgt.

Ordnungsrelationen

Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation nennt man eine Ordnung, wofür man häufig ein Symbol wie $\geq, \leq, \preccurlyeq, \subseteq$ verwendet.

Definition 3. Eine Relation $\preccurlyeq$ auf einer Menge I heißt *Ordnungsrelation* oder *Ordnung*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

(1) Es ist $i \preccurlyeq i$ für alle $i \in I$.
(2) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq k$ folgt stets $i \preccurlyeq k$.
(3) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq i$ folgt $i = j$.

Eine Menge mit einer fixierten Ordnung darauf heißt *geordnete Menge*. Wenn zusätzlich gilt, dass für je zwei Elemente $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, so spricht man von einer *total geordneten Menge*.

Beispiel 4. (Geordnete Zahlbereiche) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (ebenso die rationalen Zahlen und die ganzen Zahlen) sind total geordnet durch die *Größergleichrelation* $\geq$. Dies gehört zum Begriff des angeordneten Körpers, der nicht nur verlangt, dass eine totale Ordnung erklärt ist, sondern auch, dass diese mit den algebraischen Operationen verträglich ist. Die strikte *Größerrelation* $>$ ist keine Ordnungsrelation, da sie nicht reflexiv ist. Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet (und lässt sich auch nicht anordnen).

Beispiel 5. (Teilerbeziehung) Wir betrachten die positiven ganzen Zahlen $\mathbb{N}_+$ zusammen mit der Teilbarkeitsbeziehung. Man sagt, dass eine Zahl k die Zahl n teilt, geschrieben

$$k|n\,,$$

wenn es eine weitere natürliche Zahl m gibt mit $n = km$. Die Bezeichnung ist nicht sonderlich glücklich gewählt, da ein symmetrisches Symbol für eine nichtsymmetrische Relation verwendet wird. Die Teilbarkeitsrelation ist in der Tat reflexiv, da stets $n|n$ ist, wie $m = 1$ zeigt. Die Transitivität sieht man so: sei $k|n$ und $n|m$ mit $n = ak$ und $m = bn$. Dann ist $m = bn = bak$ und daher $k|m$. Die Antisymmetrie folgt so: aus $n = ak$ und $k = bn$ folgt $n = (ab)n$. Da wir uns auf positive natürliche Zahlen beschränken, folgt $ab = 1$ und daraus $a = b = 1$. Also ist $k = n$. Einfache Beispiele wie 2 und 3 zeigen, dass hier keine totale Ordnung vorliegt, da weder 2 von 3 noch umgekehrt geteilt wird.

Beispiel 6. (Potenzmenge)

Sei X eine beliebige Menge und $M = \mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge davon. Dann sind die Elemente aus $M = \mathfrak{P}(X)$ - also die Teilmengen von X - durch die Inklusionsbeziehung $\subseteq$ geordnet. Die Antisymmetrie ist dabei ein wichtiges Beweisprinzip für die Gleichheit von zwei Mengen: zwei Mengen M_1, M_2 sind genau dann gleich, wenn $M_1 \subseteq M_2$ und umgekehrt $M_2 \subseteq M_1$ gilt.

Beispiel 7. (Reellwertige Funktionen)

Sei X eine Menge (bspw. ein Intervall, oder ein topologischer Raum), so ist die Menge der (stetigen) Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ geordnet, indem man $f \geq g$ dadurch definiert, dass $f(x) \geq g(x)$ sein muss für jeden Punkt $x \in X$. Dies ist offensichtlich keine totale Ordnung.

Äquivalenzrelationen

Definition 8. Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt.

(1) $x \sim x$ (*reflexiv*),
(2) aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*),
(3) aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Beispiel 9. (Gleichheit) Das Urbeispiel für eine Äquivalenzrelation ist die Gleichheit auf einer beliebigen Menge. Unter der Gleichheit ist jedes Element nur mit sich selbst äquivalent.

Beispiel 10. (Gleichheit bzgl. einer Eigenschaft) Häufig interessiert man sich gar nicht so genau für einzelne Objekte, sondern nur für bestimmte Eigenschaften davon. Objekte, die sich bezüglich einer bestimmten, genau definierten Eigenschaft gleich verhalten, kann man dann (bzgl. dieser Eigenschaft) als äquivalent betrachten. Offenbar handelt es sich dabei um eine Äquivalenzrelation. Wenn man sich beispielsweise nur für die Farbe von Objekten interessiert, so sind alle Objekte, die (exakt) gleichfarbig sind, äquivalent. Wenn man sich bei Tieren nicht für irgendwelche individuellen Eigenschaften interessiert, sondern nur für ihre Art, so sind gleichartige Tiere äquivalent, d.h. zwei Tiere sind genau dann äquivalent, wenn sie zur gleichen Art gehören. Studierende kann man als äquivalent ansehen, wenn sie die gleiche Fächerkombination studieren. Vektoren kann man als äquivalent ansehen, wenn sie zum Nullpunkt den gleichen Abstand besitzen, etc. Eine Äquivalenzrelation ist also ein bestimmter Blick auf bestimmte Objekte, der unter Bezug auf eine gewisse Eigenschaft gewisse Objekte als gleich ansieht.

Gnus bilden eine Äquivalenzklasse bzgl. der Äquivalenzrelation der Gleichartigkeit, ebenso Zebras.

Bei den zuletzt genannten „alltäglichen“ Beispielen muss man etwas vorsichtig sein, da im Allgemeinen die Eigenschaften nicht so genau definiert werden. Im Alltag spielt Ähnlichkeit eine wichtigere Rolle als Gleichheit hinsichtlich einer bestimmten Eigenschaft. Die Ähnlichkeit ist aber keine Äquivalenzrelation, da sie zwar reflexiv und symmetrisch ist, aber nicht transitiv. Wenn

A und B zueinander (knapp) ähnlich sind und B und C ebenso, so kann A und C schon knapp unähnlich sein (ebenso: lebt in der Nachbarschaft von, ist verwandt mit, etc.).

Die Gleichheit bzgl. einer Eigenschaft wird durch folgende mathematische Konstruktion präzisiert.

Beispiel 11. (Äquivalenzrelation zu einer Abbildung)

Seien M und N Mengen und sei $f : M \to N$ eine Abbildung. In einer solchen Situation hat man immer eine Äquivalenzrelation auf dem Definitionsbereich M der Abbildung, und zwar erklärt man zwei Elemente $x, y \in M$ als äquivalent, wenn sie unter f auf das gleiche Element abgebildet werden, wenn also $f(x) = f(y)$ ist. Wenn die Abbildung f injektiv ist, so ist die durch f auf M definierte Äquivalenzrelation die Gleichheit. Wenn die Abbildung konstant ist, so sind unter der zugehörigen Äquivalenzrelation alle Elemente aus M untereinander äquivalent.

Zu einer Abbildung $f : M \to N$ nennt man übrigens die Menge aller Punkte $x \in M$, die auf einen bestimmten Punkt $z \in N$ abgebildet werden, die *Faser* über z. Die Äquivalenzklassen (s.u.) sind dann also die Fasern.

Beispiel 12. Wir betrachten die *Gausklammer* (oder den „floor“) einer reellen Zahl, also die Abbildung

$$\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z},\ t \longmapsto \lfloor t \rfloor .$$

Eine Zahl t wird also auf die kleinste ganze Zahl abgebildet, die kleiner oder gleich t ist (die „Vorkommazahl“). Dabei wird das gesamte ganzzahlige einseitig offene Intervall $[n, n+1)$ auf $n \in \mathbb{Z}$ abgebildet. Bezüglich dieser Abbildung sind also zwei reelle Zahlen genau dann äquivalent, wenn sie im gleichen Intervall liegen.

Statt der Vorkommazahl kann man auch die „Nachkommazahl“ betrachten. Das ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow [0, 1),\ t \longmapsto t - \lfloor t \rfloor .$$

Unter der durch diese Abbildung definierte Äquivalenzrelation sind zwei reelle Zahlen genau dann gleich, wenn sie die gleiche Nachkommazahl besitzen, und das heißt, wenn ihre Differenz eine ganze Zahl ist.

Beispiel 13. (Symmetrische Erreichbarkeitsrelation)

Es sei eine Situation gegeben, wo gewisse Orte (oder Objekte) von gewissen anderen Orten aus erreichbar sind oder nicht. Die Erreichbarkeit kann dabei durch die Wahl eines Verkehrsmittels oder durch eine abstraktere (Bewegungs-)Vorschrift festgelegt sein. Solche Erreichbarkeitsrelationen liefern häufig eine Äquivalenzrelation. Dass ein Ort von sich selbst aus erreichbar ist, sichert die Reflexivität. Die Symmetrie der Erreichbarkeit besagt, dass wenn man von A nach B kommen kann, dass man dann auch von B

nach A kommen kann. Das ist nicht für jede Erreichbarkeit selbstverständlich, für die meisten aber schon. Die Transitivität gilt immer dann, wenn man die Bewegungsvorgänge hintereinander ausführen kann, also zuerst von A nach B und dann von B nach C.

Wenn erreichbar bspw. dadurch gegeben ist, dass man auf dem Landweg von einem Ort zu einem anderen kommen kann, so sind zwei Ortspunkte genau dann äquivalent, wenn sie auf der gleichen Insel (oder dem gleichen Kontinent) liegen. Inseln und Kontinente sind dann die Äquivalenzklassen. In der Topologie spielt der Begriff des Wegzusammenhangs eine wichtige Rolle: zwei Punkte sind wegzusammenhängend, wenn man sie durch einen stetigen Weg verbinden kann. Oder: auf den ganzen Zahlen lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es, welche Flöhe können sich begegnen?

Unter der Äquivalenzrelation erreichbar auf dem Landweg sind Inseln und Kontinente die Äquivalenzklassen.

Äquivalenzklassen, Quotientenmenge, kanonische Abbildung

Eine Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M kann auch als Zerlegung der Menge M aufgefasst werden. Hierzu ist der Begriff der *Äquivalenzklasse* nützlich.

Definition 14. Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation und $x \in M$. Dann ist $[x] := \{y \in M \colon (x, y) \in R\}$ die *Äquivalenzklasse von x* bezüglich R. Es ist $[x] \subseteq M$.

In Worten: $[x]$ ist die Teilmenge aller Elemente von M, die zu x äquivalent sind.

Definition 15. Sei $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Dann ist

$$X/R := \Big\{[x] \colon x \in X\Big\}$$

die *Quotientenmenge* von R.

Definition 16. Sei $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation und X/R die Quotientenmenge. Die Abbildung $q_R \colon X \to X/R$, die $x \in X$ auf $[x] \in X/R$ abbildet, heißt *kanonische Projektion* von R.

Lemma 17. *Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M mit den Äquivalenzklassen $[x]$ und der Quotientenmenge $M/\sim$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es ist $x \sim y$ genau dann, wenn $[x] = [y]$ ist, und dies gilt genau dann, wenn $[x] \cap [y] = \emptyset$.*
(2) *$M = \bigcup_{x \in M/\sim} [x]$ ist eine disjunkte Vereinigung.*
(3) *Die kanonische Projektion $q : M \to M/\sim$ ist surjektiv.*
(4) *Es ist $q^{-1}([x]) = [x]$.*
(5) *Sei $f : M \to W$ eine Abbildung mit $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in M$ mit $x \sim y$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\overline{\varphi} : M/\sim \to W$ mit $\overline{\varphi} = \varphi \circ q$.*

Beweis. (1) Seien x und y äquivalent und $u \in [x]$. Dann ist $x \sim u$ und nach der Transitivität auch $y \sim u$, also $u \in [y]$. Damit stimmen die Äquivalenzklasssen überein. Die Implikationen von der Mitte nach rechts ist klar, da wegen $x \sim x$ Äquivalenzklassen nicht leer sind. Sei nun $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, und sei z ein Element im Durchschnitt. Dann ist $x \sim z$ und $y \sim z$ und wegen der Transitivität ist $x \sim y$.
(2) Wegen der Reflexivität ist $x \in [x]$ und daher ist $M = \bigcup_{[x] \in X/R} [x]$. Wegen Teil (1) ist die Vereinigung disjunkt.
(3) Die Surjektivität ist klar aufgrund der Definition der Quotientenmenge, und da x auf die Klasse $[x]$ geschickt wird.
(4) Es ist
$$\begin{aligned} q^{-1}([x]) = \{y \in M : q(y) = [x]\} &= \{y \in M : [y] = [x]\} \\ &= \{y \in M : y \sim x\} = x. \end{aligned}$$
(5) Sei $[x] \in M/\sim$ gegeben. Die einzige Möglichkeit für $\overline{\varphi}$ ist $\overline{\varphi}([x]) = \varphi(x)$ zu setzen. Es muss aber gezeigt werden, dass diese Abbildung überhaupt wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ist. Sei hierzu $[x] = [y]$, also $x \sim y$. Dann ist nach der Voraussetzung an φ aber $\varphi(x) = \varphi(y)$.

□

Beispiel 18. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Der $\mathbb{R}^{n+1}$ ist ein reeller Vektorraum, wobei die Skalarmultiplikation von $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\lambda \cdot x$ bezeichnet wird. Sei weiter

$$R := \{(x, y) \in X \times X : \text{ es gibt ein } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } \lambda \cdot x = y\}.$$

Zwei Punkte werden also also äquivalent erklärt, wenn sie durch Skalarmultiplikation mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ ineinander überführt werden können. Ebenso könnte man sagen, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn sie dieselbe Gerade durch den Nullpunkt definieren.

Dass wirklich eine Äquivalenzrelation vorliegt, sieht man so. Die Reflexivität folgt aus $x = 1x$ für jedes $x \in X$. Zur Symmetrie sei xRy, d.h. es gibt

$\lambda \neq 0$ mit $\lambda x = y$. Dann gilt aber auch $y = \lambda^{-1} x$, da ja λ invertierbar ist. Zur Transitivität sei xRy und yRz angenommen, d.h. es gibt $\lambda, \delta \neq 0$ mit $\lambda x = y$ und $\delta y = z$. Dann ist insgesamt $z = \delta y = (\delta\lambda)x$ mit $\delta\lambda \neq 0$. Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation sind die einzelnen Geraden durch den Nullpunkt (aber ohne den Nullpunkt). Die Quotientenmenge heißt *reell projektiver Raum* (der reellen Dimension n) und wird mit $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ bezeichnet.

Abbildungsverzeichnis