Universität Osnabrück
Vorlesung *Algebraische Kurven* 2008/2009
Prof. Dr. Holger Brenner
Arbeitsblatt 28

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Bestimme den projektiven Abschluss der durch

$$V((X^2+Y^2)^2 - 2X(X^2+Y^2) - Y^2)$$

gegebenen *Kardioide* über den komplexen Zahlen und insbesondere die „Punkte im Unendlichen“.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Es sei $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ ein n-dimensionaler affiner Unterraum, auf dem nicht der Nullpunkt liege, und es sei $\tilde{H}$ der dazu parallele Unterraum durch den Nullpunkt. Es sei $U \subseteq H$ eine in $H \cong \mathbb{K}^n$ offene Menge (in der metrischen Topologie) und es sei V die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt von U. Zeige, dass der Durchschnitt von V mit $\mathbb{K}^{n+1} - \tilde{H}$ offen ist.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei $D_+(X) \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$, wobei X eine homogene Linearform im zugehörigen Polynomring $K[X_0, \ldots, X_n]$ sei. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum die Zariski-Topologie auf dem affinen Raum induziert.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Seien X und Y quasiprojektive Varietäten und sei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Es sei $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeige, dass φ genau dann ein Morphismus ist, wenn die Einschränkungen $\varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \to U_i$ Morphismen sind für jedes i.

In den folgenden vier Aufgaben geht es um die *Kegelabbildung*.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Definiere die *Kegelabbildung*

$$\mathbb{A}^{n+1}_K - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K \,,$$

die einem vom Nullpunkt verschiedenen Punkt des affinen Raumes denjenigen projektiven Punkt zuordnet, der der Gerade durch den Punkt und dem Nullpunkt entspricht. Bestimme das Urbild einer offenen Menge des projektiven Raumes unter dieser Abbildung und zeige, dass sie stetig bzgl. der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Zeige, dass die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_K^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$$

ein Morphismus von quasiprojektiven Varietäten ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Zeige durch ein Beispiel, dass die Kegelabbildung $\mathbb{A}_K^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$ nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Bestimme für die Kegelabbildung $\mathbb{A}_K^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$ den Zariski-Abschluss im $\mathbb{P}_K^n$ des Bildes einer abgeschlossenen Menge $V(\mathfrak{a}) \cap \mathbb{A}_K^{n+1} - \{0\}$.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Man definiere und charakterisiere, wann eine irreduzible quasiprojektive Varietät *normal* ist.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Sei $F \in K[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom und $R = K[X,Y]/(F)$ der integre Koordinatenring der ebenen Kurve $C = V(F)$. Es sei $R \to S = R^{\text{norm}}$ die Normalisierung von R und es sei $R \to K[[T]]$ der Ringhomomorphismus zu einer nichtkonstanten formalen Potenzreihenlösung der Kurve. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $S \to K[[T]]$ gibt derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ & \searrow & \downarrow \\ & & K[[T]] \end{array}$$

kommutiert.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Zeige, dass in $K[X,Y]_{(X,Y)}/(X^2 - Y^3)$ jedes Ideal durch maximal zwei Erzeuger gegeben ist.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer ebenen monomialen Kurve und eines Ideals im zugehörigen lokalen Ring der Singularität, das nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann.