

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 18

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 18.1. Es sei K ein kommutativer Ring und $H = K[X]$ sei mit der in Beispiel 17.9 eingeführten (additiven) K -Hopf-Algebrastruktur versehen. Zeige, dass zu einer kommutativen K -Algebra L die induzierte Gruppenstruktur auf $L \cong (\text{Spek}(H))(L)$ mit der Addition auf L übereinstimmt.

AUFGABE 18.2. Es sei K ein kommutativer Ring und H eine kommutative K -Hopf-Algebra zusammen mit einer Kooperation auf der kommutativen K -Algebra R . Wir betrachten die beiden K -Algebrahomomorphismen

$$N: R \longrightarrow H \otimes_K R$$

(die Kooperation) und

$$\iota_2: R \longrightarrow H \otimes_K R, r \longmapsto 1 \otimes r.$$

Zeige, dass die Menge

$$\{r \in R \mid N(r) = \iota_2(r)\}$$

ein Unterring von R ist.

Den in der vorstehenden Aufgabe definierten Unterring nennt man auch den *Invariantenring der Kooperation*.

AUFGABE 18.3. Es sei X eine Menge, auf der eine Gruppe G operiere, und sei

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung in einer weitere Menge Y . Zeige, dass φ genau dann G -invariant ist, wenn das Diagramm

$$G \times X \xrightarrow{\nu, p_2} X \longrightarrow Y$$

kommutiert.

AUFGABE 18.4. Es sei K ein kommutativer Ring und R eine kommutative K -Algebra, auf der eine endliche Gruppe G als Gruppe von K -Algebraautomorphismen operiere.

- (1) Definiere eine Kooperation der Hopf-Algebra $H = \text{Abb}(G, K)$ auf R derart, dass man über die zugehörige Operation der Spektren die ursprüngliche Operation zurückgewinnt.
- (2) Zeige, dass der Invariantenring R^G mit dem Invariantenring zur Kooperation übereinstimmt.

AUFGABE 18.5. Es sei K ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und $K[D]$ der zugehörige Gruppenring mit der in Beispiel 17.11 beschriebenen Hopf-Struktur. Es sei A eine kommutative K -Algebra.

- (1) Es liege eine D -Graduierung von A (als K -Algebra) vor. Zeige, dass durch

$$A \longrightarrow K[D] \otimes_K A, a_d \longmapsto T^d \otimes a_d,$$

eine K -Kooperation der Hopf-Algebra $K[D]$ auf A festgelegt wird.

- (2) Es liege eine K -Kooperation

$$N: A \longrightarrow K[D] \otimes_K A$$

von $K[D]$ auf A vor. Zeige, dass durch

$$A_d := \{a \in A \mid T^d \otimes a = N(a)\}$$

eine D -Graduierung auf A festgelegt wird.

- (3) Zeige, dass die Zuordnungen aus (1) und (2) invers zueinander sind.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 18.6. (3 Punkte)

Es sei K ein kommutativer Ring und $H = K[X, X^{-1}] = K[X]_X$ sei mit der in Beispiel 17.10 eingeführten (multiplikativen) K -Hopf-Algebrastruktur versehen. Zeige, dass zu einer kommutativen K -Algebra L die induzierte Gruppenstruktur auf $L^\times \cong (\text{Spek}(H))(L)$ mit der Multiplikation übereinstimmt.

AUFGABE 18.7. (3 Punkte)

Es sei K ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und $K[D]$ der zugehörige Gruppenring. Bestimme zu einer kommutativen K -Algebra L die Gruppe $(\text{Spek}(K[D]))(L)$.