Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 6

Der zentrale Begriff der linearen Algebra ist der Vektorraum.

Vektorräume

Definition 6.1. Es sei K ein Körper und V eine Menge mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und mit zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \longrightarrow V,\ (u,v) \longmapsto u+v,$$

und

$$K \times V \longrightarrow V,\ (r,v) \longmapsto rv = r \cdot v.$$

Dann nennt man V einen K-*Vektorraum* (oder einen Vektorraum über K), wenn die folgenden Axiome erfüllt sind[1] (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v, w \in V$ beliebig) [2]

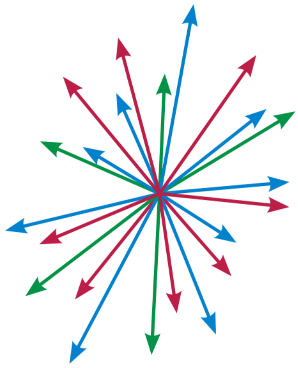
(1) $u + v = v + u$,
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(3) $v + 0 = v$,
(4) Zu jedem v gibt es ein z mit $v + z = 0$.
(5) $r(su) = (rs)u$,
(6) $r(u + v) = ru + rv$,
(7) $(r + s)u = ru + su$,
(8) $1 \cdot u = u$.

Die Verknüpfung in V nennt man (Vektor)-Addition und die Operation $K \times V \to V$ nennt man *Skalarmultiplikation*. Die Elemente in einem Vektorraum nennt man *Vektoren*, und die Elemente $r \in K$ heißen *Skalare*. Das Nullelement $0 \in V$ wird auch als *Nullvektor* bezeichnet, und zu $v \in V$ heißt das inverse Element das *Negative* zu v und wird mit $-v$ bezeichnet. Den Körper, der im Vektorraumbegriff vorausgesetzt ist, nennt man auch den *Grundkörper*. Alle Begriffe der linearen Algebra beziehen sich auf einen solchen Grundkörper, er darf also nie vergessen werden, auch wenn er manchmal nicht explizit aufgeführt wird. Bei $K = \mathbb{R}$ spricht man von *reellen Vektorräumen* und bei $K = \mathbb{C}$ von *komplexen Vektorräumen*. Bei reellen und

[1] Die ersten vier Axiome, die unabhängig von K sind, bedeuten, dass $(V, 0, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

[2] Auch für Vektorräume gilt die *Klammerkonvention*, dass Punktrechnung stärker bindet als Strichrechnung.

komplexen Vektorräumen gibt es zusätzliche Strukturen wie Längen, Winkel, Skalarprodukt. Zunächst entwickeln wir aber die algebraische Theorie der Vektorräume über einem beliebigen Körper.



Beispiel 6.2. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Produktmenge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n-\text{mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in K\}$$

mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Man nennt ihn den n-dimensionalen *Standardraum*. Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein Vektorraum.

Der Nullraum 0, der aus dem einzigen Element 0 besteht, ist ebenfalls ein Vektorraum. Man kann ihn auch als $K^0 = 0$ auffassen.

Beispiel 6.3. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper und daher bilden sie einen Vektorraum über sich selbst. Andererseits sind die komplexen Zahlen als additive Struktur gleich $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation einer komplexen Zahl $a + bi$ mit einer reellen Zahl $\lambda = (\lambda, 0)$ geschieht komponentenweise, d.h. diese Multiplikation stimmt mit der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ überein. Daher sind die komplexen Zahlen auch ein reeller Vektorraum. Unter Verwendung einer späteren Terminologie kann man sagen, dass $\mathbb{C}$ ein eindimensionaler komplexer Vektorraum ist und dass $\mathbb{C}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ist mit der reellen Basis 1 und i.

Beispiel 6.4. Sei $R = K[X]$ die Menge aller Polynome in einer Variablen über dem Körper K. Man definiert eine Addition auf R, indem man zu zwei Polynomen

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ und } Q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

folgendermaßen vorgeht. Es sei $n = \max(n, m)$. Man kann dann Q als eine Summe schreiben, die bis n läuft, indem man die dazu benötigten Koeffizienten b_i, $i > m$, gleich null setzt. Damit definiert man die Summe komponentenweise, also

$$P + Q = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i .$$

Des Weiteren kann man ein Polynom $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit einem Skalar $\lambda \in K$ multiplizieren, indem man

$$\lambda P := \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) X^i$$

setzt. Man kann einfach nachprüfen, dass mit diesen Operationen ein Vektorraum vorliegt.

Lemma 6.5. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten die folgenden Eigenschaften (dabei sei $v \in V$ und $\lambda \in K$).*

(1) *Es ist $0v = 0$.* [3]
(2) *Es ist $\lambda 0 = 0$.*
(3) *Es ist $(-1)v = -v$.*
(4) *Aus $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $\lambda v \neq 0$.*

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Erzeugendensysteme und Untervektorräume

Definition 6.6. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn gilt

(1) $0 \in U$.
(2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(3) Mit $u \in U$ und $\lambda \in K$ ist auch $\lambda u \in U$.

Auf einem solchen Untervektorraum kann man die Addition und die skalare Multiplikation einschränken. Daher ist ein Untervektorraum selbst ein Vektorraum, siehe Aufgabe *****. Die einfachsten Untervektorräume in einem Vektorraum V sind der Nullraum 0 und der gesamte Vektorraum V.

Lemma 6.7. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$

[3] Man mache sich hier und im Folgenden klar, wann die 0 in K und wann sie in V zu verstehen ist.

ein lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Beweis. Siehe Aufgabe *****. $\square$

Man spricht daher auch vom *Lösungsraum* des Gleichungssystems. Insbesondere addiert man zwei lineare Gleichungen, indem man die zu einer Variablen gehörenden Koeffizienten jeweils miteinander addiert. Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems ist kein Vektorraum. Dennoch gibt es auch dafür eine sinnvolle Addition, wobei man wieder die Koeffizienten zu den Variablen, aber auch die inhomogenen Koeffizienten miteinander addieren muss.

Beispiel 6.8. Wir knüpfen an die homogene Version von Fakt ***** an, d.h. wir berachten das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 0 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 0 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 0\,. \end{array}$$

über $\mathbb{R}$. Aufgrund von Fakt ***** ist die Lösungsmenge L ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$. Wir haben ihn in Fakt ***** explizit als

$$\{u(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},1,0)+v(-\frac{2}{13},\frac{5}{13},-\frac{12}{39},0,1)|\,u,v\in\mathbb{R}\}$$

beschrieben, woraus ebenfalls erkennbar ist, dass dieser Lösungsraum ein Vektorraum ist. In dieser Schreibweise wird klar, dass L in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$ steht, und zwar respektiert diese Bijektion sowohl die Addition als auch die Skalarmultiplikation (der Lösungsraum L' des inhomogenen Systems steht ebenfalls in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$, allerdings gibt es keine sinnvolle Addition und Skalarmultiplikation auf L'). Allerdings hängt diese Bijektion wesentlich von den gwählten „Basislösungen“ $(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},1,0)$ und $(-\frac{2}{13},\frac{5}{13},-\frac{12}{39},0,1)$ ab, die u.A. von der gewählten Eliminationsreihenfolge abhängen. Es gibt für L andere gleichberechtigte Basislösungen.

An diesem Beispiel kann man sich Folgendes klar machen: Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems ist „in natürlicher Weise“, d.h. unabhängig von jeder Auswahl, ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ (wenn n die Anzahl der Variablen ist). Der Lösungsraum kann auch stets in eine „lineare Bijektion“ (eine „Isomorphie“) mit dem $\mathbb{R}^{n-m-1}$ gebracht werden, doch gibt es dafür keine natürliche Wahl. Dies ist einer der Hauptgründe dafür, mit dem abstrakten Vektorraumbegriff zu arbeiten anstatt lediglich mit dem K^n.

Definition 6.9. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1,\ldots,v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor

$$a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n \text{ mit } a_i\in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren (zum *Koeffiziententupel* $(a_1,\ldots,a_n)$).

Zwei unterschiedliche Koeffiziententupel können denselben Vektor definieren.

Definition 6.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie $v_i \in V$, $i \in I$, ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ darstellen kann als[4]

$$v = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j$$

mit einer endlichen Teilfamilie $J \subseteq I$ und mit $\lambda_j \in K$.

Definition 6.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einer Familie v_i, $i \in I$, setzt man

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = \{ \sum_{i \in J} c_i v_i |\, c_i \in K,\ J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \}$$

und nennt dies den von der Familie *erzeugten* oder *aufgespannten Untervektorraum.*

Der von der leeren Menge erzeugte Unterraum ist der Nullraum.[5] Dieser wird ebenso von der 0 erzeugt. Zu einem einzigen Vektor v besteht der aufgespannte Raum aus $Kv = \{\lambda v |\, \lambda \in K\}$. Bei $v \neq 0$ ist dies eine *Gerade*, was wir im Rahmen der Dimensionstheorie noch präzisieren werden. Bei zwei Vektoren v und w hängt die „Gestalt“ des aufgespannten Raumes davon ab, wie die beiden Vektoren sich zueinander verhalten. Wenn sie beide auf einer Geraden liegen, d.h. wenn gilt $w = \lambda v$, so ist w überflüssig und der von den beiden Vektoren erzeugte Unterraum stimmt mit dem von v erzeugten Unterraum überein. Wenn dies nicht der Fall ist (und v und w nicht 0 sind), so erzeugen die beiden Vektoren eine „Ebene“.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften für Erzeugendensysteme und Unterräume zusammen.

Lemma 6.12. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist auch der Durchschnitt*[6]

$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$

ein Untervektorraum.

[4]Es bedeutet keinen Verständnisverlust, wenn man hier nur endliche Familien betrachtet. Das Summenzeichen über eine endliche Indexmenge bedeutet einfach, dass alle Elemente der Familie aufzusummieren sind.

[5]Dies kann man als Definition nehmen oder aber aus der Definition ableiten, wenn man die Konvention berücksichtigt, dass die leere Summe gleich 0 ist.

[6]Der Durchschnitt $\bigcap_{j \in J} T_j$ zu einer beliebigen Indexmenge J und einer durch J indizierten Familie T_j, $j \in J$, von Teilmengen einer festen Obermenge M besteht aus allem Elementen aus M, die in mindestens einer der Mengen T_j enthalten sind.

(2) *Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum*[7] *von V. Er stimmt mit dem Durchschnitt*

$$\bigcap_{U \subseteq V \text{ Untervektorraum}, v_i \in U \text{ für alle } i \in I} U$$

überein.

(3) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn*

$$\langle v_i, \, i \in I \rangle = V$$

ist.

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

[7] In der Bezeichnung „erzeugter Unterraum“ wurde diese Eigenschaft schon vorweg genommen.

Abbildungsverzeichnis