Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Reelle und angewandte Analysis

Arbeitsblatt 61

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 61.1. Zeige, dass die Menge der ganzen Zahlen abzählbar ist.

Aufgabe 61.2. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist.

Aufgabe 61.3. Nehmen wir an, dass auf der Erde abzählbar unendlich viele Menschen leben würden, und dass jeder Mensch genau einen Euro besitzt. Finde eine „Umverteilungsvorschrift“, die jeden Menschen zu einem Euro-Milliardär macht.

Aufgabe 61.4. Wir betrachten für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ die symmetrische Differenz

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) .$$

Wir setzen

$$A \sim B ,$$

falls $A \triangle B$ abzählbar ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ definiert wird.

Aufgabe 61.5. Der Barbier von Sevilla behauptet, dass er genau diejenigen Bürger von Sevilla rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Weise nach, dass er lügt.

Aufgabe 61.6. Zeige, dass die Potenzmenge einer Menge niemals abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 61.7. Wir nennen eine reelle Zahl *adressierbar*, wenn es einen endlichen Text (über einem fixierten endlichen Alphabet, das aus mathematischen oder sonstigen Symbolen besteht) gibt, der diese Zahl eindeutig beschreibt. Ist die Menge dieser Zahlen abzählbar? Was ergibt sich, wenn man das Diagonalargument aus dem Beweis zu Satz 61.9 anwendet?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 61.8. (4 Punkte)

Es sei M eine abzählbare Menge. Zeige, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von M abzählbar ist.

Aufgabe 61.9. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge der Polynome in einer Variablen mit rationalen Koeffizienten abzählbar ist.

Aufgabe 61.10. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ überabzählbar ist.

Aufgabe 61.11. (7 Punkte)

Es sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine summierbare Familie von nichtnegativen reellen Zahlen. Zeige, dass die Teilmenge

$$J = \{ i \in I \mid a_i \neq 0 \}$$

abzählbar ist.

Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Reelle und angewandte Analysis

Informationen

Liebe Freunde der Mathematik

Herzlich willkommen zur Vorlesung "Reelle und angewandte Analysis" (Mathematik III) im Wintersemester 2010/2011. Dieses Blatt enthält die wesentlichen Informationen zu Aufgaben, Übungsbetrieb und Klausur der Vorlesung. Fragen Sie bitte nach, wenn etwas unklar ist.

Arbeitsblätter und Übungsbetrieb

Zu jeder Vorlesung gibt es ein Arbeitsblatt. Es besteht jeweils aus mehreren Übungen bzw. Aufgaben, die das Verständnis des Vorlesungsinhalts vertiefen sollen. Es unterteilt sich in Aufwärmaufgaben und Aufgaben zum Abgeben. Ich empfehle, den Stoff der Vorlesung anhand der Arbeitsblätter sofort und kontinuierlich nachzuarbeiten. Die Blätter sind verhältnismäßig umfangreich; der Umfang orientiert sich daran, in welchem Maße Sie sich mit dem Stoff auseinandersetzen müssen, um ein sehr gutes Verständnis zu erzielen. Bei der Gestaltung der Arbeitsblätter versuche ich grundsätzlich, ein umfangreiches Arbeitsangebot zur Verfügung zu stellen, das unterschiedliche Schwierigkeitsgrade abdeckt. Sie sollten sich dabei auf das für Sie Anspruchsvolle konzentrieren. Dass durch die Übungsaufgaben auch die Teilnahmeberechtigung an der Klausur erworben wird ist wichtig, aber ein Nebenaspekt.

In den Übungen können Sie Fragen zur Vorlesung stellen, es werden die Aufwärmaufgaben besprochen, Präsenzaufgaben bearbeitet, manchmal Tipps zu den abzugebenden Aufgaben gegeben, alte Aufgaben zurückgegeben und teilweise vorgerechnet. In allen Teilen ist die aktive Mitarbeit der Studierenden wichtig. Sie können auf dem Forum (auf Wikiversity) Wünsche äußern, was in den Übungen besprochen werden soll.

Während der Woche bearbeiten Sie die abzugebenden Aufgaben. Dies dient dem vertieften Verständnis des Stoffes und ist die Voraussetzung, um für die Klausur zugelassen zu werden. Sie können Ihre Aufgaben in festen Gruppen von (bis zu) sechs Personen abgeben. Der gemeinsame Abgabetermin für die beiden Arbeitsblätter einer Vorlesungswoche ist Donnerstag um 10:00 im Eingangsbereich 69. Sie werfen die arbeitsgruppenweise erstellten Lösungen in das Fach des für Ihre Gruppe zuständigen Tutors (das wird noch festgelegt). Die Tutoren korrigieren die Aufgaben, und Sie erhalten die korrigierten Aufgaben in der Lösungs-Übungsgruppe am Dienstag der nächst folgenden Woche zurück. Wenn Sie eine Korrektur überhaupt nicht nachvollziehen können, wenden Sie sich bitte direkt an den Korrekteur.

Es werden keine Musterlösungen ausgeteilt.

Testklausuren Es werden zwei Testklausuren unter den Rahmenbedingungen einer echten Klausur geschrieben (4.12.2010 und 5.2.2011). Die dabei erreichten Punktezahlen gehen doppelt in die Gesamtpunktzahl ein.

Klausurberechtigung

Um für die Klausur zugelassen zu werden, müssen Sie in den Übungen und in den beiden Testklausuren insgesamt 200 Punkte erreichen. Diese Zahl ergibt sich aus $200 = 14 \cdot 12 + 2 \times 16$, d.h. Sie sollten in einer Testklausur 16 (die doppelt eingeht) Punkte erreichen und pro Woche durchschnittlich mindestens 12 Punkte erreichen (das entspricht etwa der erfolgreichen Bearbeitung von drei mittleren Aufgaben).

Es sind dabei einige Besonderheiten zu beachten, die mit der relativen Vielzahl an Aufgaben zusammenhängen. Pro Woche können maximal 20 Punkte gut geschrieben werden ("Deckelregel"). Bei jeder (Teil-)Aufgabe gilt die "Sockelregel", die besagt, dass eine Aufgabe (bzw. ein Aufgabenteil) nur dann in die Wertung eingeht, wenn sie zumindest zur Hälfte richtig beantwortet ist. Es muss also ein "substantieller Beitrag" zur Lösung der Aufgabe erkennbar sein. Damit soll verhindert werden, dass in der Hoffnung auf Punkte rudimentäre Beiträge abgegeben werden. Diese Sockelregel gilt auch in der Klausur.

Zusätzlich zu den Aufgaben gibt es noch einige kleinere Möglichkeiten, Punkte zu sammeln. Für die Korrektur eines Fehlers im Skript (auf Wikiversity) gibt es einen halben Punkt, für die Korrektur eines mathematischen Fehlers auch mehr. Für die Bereitstellung von schönen Bildern, Animationen o. Ä. können ebenfalls zusätzliche Punkte vergeben werden. Genaueres auf Anfrage. Diese zusätzlichen Punkte werden zum Schluss des Semesters verrechnet. Sie können auch selbst hier eigene Aufgaben verfassen, die Punktezahl bestimmt allerdings der Dozent.

Wenn Sie in einem früheren Semester den Übungsbetrieb zu dieser Veranstaltung besucht und dadurch die Klausurberechtigung erworben haben, so wird dies Berechtigung akzeptiert. Als Nachweis gilt, dass Sie bei der damaligen Klausur teilgenommen haben.

Termine

Die Vorlesung findet statt Di 10-12 in 31/E05 und Do 10-12, in 31/E06.

Die zwei Übungsgruppen finden statt

Gruppe 1: Donnerstag 31/E06 14:00-16:00 (Matthias Schulte)

Gruppe 2: Freitag 69/118 12:30-14:00 (Holger Brenner)

Zusätzlich findet eine Übung statt, in der speziell die Lösungen zu den bereits ab- und zurückgegebenen Aufgaben besprochen werden.

Gruppe L: Dienstag 31/E06 12:30-14:00 (Inga Heudtlaß)

Testklausuren: 4. Dezember 2010 und 5. Februar 2011 um 10 Uhr in 66/E33.

Klausur: 29. März 2011 um 13 Uhr in 66/E33-E34.