Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 24

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 24.1. Beschreibe ein Beispiel einer glatten Kurve $C \subset \mathbb{A}_K^2$ mit einer Parametrisierung, deren Differential an mindestens einem Punkt verschwindet.

Aufgabe 24.2. Betrachte das Achsenkreuz $V(xy) \subset \mathbb{A}_K^2$ und den zum Nullpunkt gehörigen lokalen Ring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Beschreibe explizit eine K-Basis für die Restklassenringe $R/\mathfrak{m}^n$ und bestimme die Dimensionen davon.

Aufgabe 24.3. Sei K ein Körper und $K[[T]]$ der Potenzreihenring. Gebe die inverse Potenzreihe zu $1 - T$ an.

Aufgabe 24.4. Sei K ein Körper, $\mathfrak{m} = (T) \subset K[T]$ das zum Nullpunkt gehörige maximale Ideal mit der Lokalisierung $R = K[T]_{\mathfrak{m}}$. Definiere einen K-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow K[[T]]$$

mit $\varphi(T) = T$, wobei $K[[T]]$ den Ring der formalen Potenzreihen bezeichnet.

Aufgabe 24.5. Sei R ein lokaler Ring mit Restekörper K. Zeige, dass R und K genau dann die gleiche Charakteristik haben, wenn R einen Körper enthält.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.6. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für ein irreduzibles reelles Polynom $F \in \mathbb{R}[X, Y]$ derart, dass beide partiellen Ableitungen übereinstimmen und nicht konstant sind. Zeige, dass dies über $\mathbb{C}$ nicht möglich ist.

Aufgabe 24.7. (3 Punkte)

Betrachte die Kurve $C = V(X^2 - Y^2 - Y^3)$ mit der in Beispiel 24.3 besprochenen Parametrisierung. Bestimme die singulären Punkte der Kurve zusammen mit den Multiplizitäten und Tangenten. Berechne ebenfalls die Bildpunkte und die Tangenten für die Parameterwerte $t = -1, 0, 1$.

Aufgabe 24.8. (3 Punkte)

Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring, das in genau einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ als einzigem Primoberideal enthalten sei. Zeige, dass dann $R/\mathfrak{a} \cong R_\mathfrak{m}/\mathfrak{a}R_\mathfrak{m}$ ist. Folgere daraus, dass für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in einem noetherschen kommutativen Ring die Isomorphie $R/\mathfrak{m}^n \cong R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n R_\mathfrak{m}$ für jedes n gilt.

Aufgabe 24.9. (3 Punkte)

Beschreibe eine formale Potenzreihe über $\mathbb{C}$, die in keiner Umgebung des Nullpunktes konvergiert.

Aufgabe 24.10. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Vergleiche die beiden Ringe

$$(K[X])[[Y]] \text{ und } (K[[Y]])[X]\,.$$

Aufgabe 24.11. (6 Punkte)

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Man zeige, dass $R[[T_1, \ldots, T_n]]$ noethersch ist.

Hinweis: Lassen Sie sich vom Beweis des Hilbertschen Basissatzes inspirieren!