Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 7

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 7.1. Transformiere die Quadrik

$$2x^2 + xy - 3y^2 + 5x - y + 3$$

auf eine reelle Standardgestalt.

Aufgabe 7.2. Parametrisiere die durch

$$F = 2x^2 - xy + 3y^2 + x - 5y$$

definierte Quadrik mit Hilfe des Nullpunktes und der Geraden $V(y-1)$.

Aufgabe 7.3. (Punkte)

Betrachte die beiden Kreise

$$X^2 + Y^2 = 1 \text{ und } 4X^2 + 3Y^2 = 9\,.$$

Zeige, dass die beiden Kreise über $\mathbb{R}$ affin-linear äquivalent sind, aber nicht über $\mathbb{Q}$.

Tipp: Eine Argumentationsmöglichkeit ergibt sich aus Satz 68.2 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)).

Aufgabe 7.4.*

Sei $F = (0,0)$ der Nullpunkt in der reellen Ebene und $G = V(X-1)$. Es sei $e > 0$ eine reelle Zahl. Bestimme eine algebraische Gleichung für die Menge der Punkte $P = (x, y)$ mit der Eigenschaft, dass der Abstand $d(P, F)$ proportional mit Proportionalitätsfaktor $\sqrt{e}$ zum (senkrechten) Abstand $d(P, G)$ ist.

Zeigen Sie, indem Sie die Gleichung geeignet transformieren, dass bei $e < 1$ eine Ellipse, bei $e = 1$ eine Parabel und bei $e > 1$ eine Hyperbel vorliegt.

Aufgabe 7.5. Sei K ein unendlicher Körper und sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein von null verschiedenes Polynom. Zeige, dass dann die Nullstellenmenge $V(F)$ nicht der gesamte affine Raum $\mathbb{A}_K^n$ ist.

(Aus dieser Aufgabe folgt auch Aufgabe 3.13).

Aufgabe 7.6. Bestimme für das Bild der Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \setminus \{-1,0,1\} \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\, t \longmapsto \left(\frac{t}{t^2-1}, \frac{1}{t} \right)$$

eine nichttriviale algebraische Gleichung.

Aufgabe 7.7. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und

$$P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{A}_K^2$$

n Punkte in der affinen Ebene. Zeige, dass es genau dann eine polynomiale Abbildung

$$\varphi\colon\, \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2$$

mit bild $\varphi = \{P_1, \ldots, P_n\}$ gibt, wenn $1 \leq n \leq q$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.8. (9 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\; (u,v) \longmapsto (u^2+uv, v-u^2) = (x,y)\,.$$

Bestimme zu den drei folgenden Scharen aus parallelen Geraden die Bildkurven der Geraden unter dieser Abbildung (man gebe sowohl eine Parametrisierung als auch eine Kurvengleichung).

(1) Die zur u-Achse parallelen Geraden,
(2) die zur v-Achse parallelen Geraden,
(3) die zur Antidiagonalen parallelen Geraden.

Bestimme zu jeder Schar, ob sich die Bildkurven überschneiden.

Aufgabe 7.9. (6 Punkte)

Finde für die verschiedenen reellen Quadriken eine Realisierung als Kegelschnitt, also als Schnitt einer Ebene mit dem Kegel $V(x^2+y^2-z^2)$, oder beweise, dass es eine solche Realisierung nicht gibt.

Aufgabe 7.10. (6 Punkte)

Wir betrachten die beiden Restklassenringe

$$R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \text{ und } S = \mathbb{R}[X,Y]/(XY-1)\,.$$

Zeige: S ist ein Hauptidealbereich, R hingegen nicht.

(Das sind die Ringe, die zum reellen Kreis und zur reellen Hyperbel gehören.)
Tipp: Man betrachte für R das Ideal $(X-1, Y)$.

Aufgabe 7.11. (4 Punkte)

Parametrisiere die durch
$$F = x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y + 4$$
definierte Quadrik $C = V(F)$ mit Hilfe des Punktes $(1, 2) \in C$ und der y-Achse. Führe keine Variablentransformation durch.

Aufgabe 7.12. (3 Punkte)

Betrachte die durch
$$C = V(X^{d+1} - Y^d)$$
definierte algebraische Kurve $C (d \geq 1)$. Zeige, dass man mit dem Nullpunkt und der Geraden $V(X - 1)$ eine Parametrisierung von C erhält mit der im Beweis zu Satz 7.6 beschriebenen Methode.

Aufgabe 7.13. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein irreduzibles Polynom. Zeige, dass die Kurve $V(F)$ genau dann rational ist, wenn es einen injektiven K-Algebra-Homomorphismus
$$Q(K[X, Y]/(F)) \longrightarrow K(T)$$
gibt.

(Hier steht links der Quotientenkörper und rechts der rationale Funktionenkörper.)