Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 12

Lineare Abbildungen

Definition 12.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektor/-räume. Eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
(2) $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$.

Die erste Eigenschaft nennt man dabei die *Additivität* und die zweite Eigenschaft die *Verträglichkeit mit Skalierung*. Wenn man den Grundkörper betonen möchte spricht man von K-Linearität. Lineare Abbildung heißen auch *Homomorphismen* von Vektor/-räumen. Die Identität $\mathrm{Id}_V : V \to V$, die Nullabbildung $V \to 0$ und die Inklusionen $U \subseteq V$ von Untervektorräumen sind die einfachsten Beispiele für lineare Abbildungen.

Beispiel 12.2. Es sei K ein Körper und sei K^n der n-dimensionale Standardraum. Dann ist die i-te Projektion, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K,\ (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \longmapsto a_i,$$

eine K-lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i-te Projektion heißt auch die i-te Koordinatenfunktion.

Die folgende Aussage bestätigt erneut das Prinzip, dass in der linearen Algebra (von endlichdimensionalen Vektor/-räumen) die Objekte durch endlich viele Daten bestimmt sind.

Satz 12.3. *Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektor/-räume. Es sei v_i, $i \in I$, eine Basis von V und es seien w_i, $i \in I$, Elemente in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$f : V \longrightarrow W$$

mit

$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I\,.$$

Beweis. Da $f(v_i) = w_i$ sein soll und eine lineare Abbildung für jede Linearkombination die Eigenschaft

$$f(\sum_{i \in I} a_i v_i) = \sum_{i \in I} a_i f(v_i)$$

erfüllt, und jeder Vektor $v \in V$ sich als eine solche Linearkombination schreiben lässt, kann es maximal nur eine solche lineare Abbildung geben. Wir definieren nun umgekehrt eine Abbildung

$$f : V \longrightarrow W,$$

indem wir jeden Vektor $v \in V$ mit der gegebenen Basis als

$$v = \sum_{i \in I} a_i v_i$$

schreiben (wobei $a_i = 0$ ist für fast alle $i \in I$) und

$$f(v) := \sum_{\in I} a_i w_i$$

ansetzen. Da die Darstellung von v als eine solche Linearkombination eindeutig ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Linearität. Für zwei Vektoren $u = \sum_{i \in I} a_i v_i$ und $v = \sum_{i \in I} b_i v_i$ gilt

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f((\sum_{i \in I} a_i v_i) + (\sum_{i \in I} b_i v_i)) \\ &= f(\sum_{i \in I} (a_i + b_i) v_i) \\ &= \sum_{i \in I} (a_i + b_i) f(v_i) \\ &= \sum_{i \in I} a_i f(v_i) + \sum_{i \in I} b_i f(v_i) \\ &= f(\sum_{i \in I} a_i v_i) + f(\sum_{i \in I} b_i v_i) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ergibt sich ähnlich. □

LEMMA 12.4. *Es sei K ein Körper und seien U, V, W K-Vektorräume. Es seien*

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.5. □

LEMMA 12.5. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen

(1) *Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Unterraum von W.*
(2) *Insbesondere ist das Bild* bild $\varphi = \varphi(V)$ *der Abbildung ein Unterraum von W.*

(3) *Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Unterraum von V.*
(4) *Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Unterraum von V.*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.6. □

Definition 12.6. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\text{kern } \varphi = \varphi^{-1}(0) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.

Der Kern ist also nach der obigen Aussage ein Untervektorraum.

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium*.

Lemma 12.7. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn kern $\varphi = 0$ *ist.*

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt kern $\varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \text{kern } \varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

Satz 12.8. *(Dimensionsformel) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \dim(\text{bild } \varphi)\,.$$

Beweis. Sei $n = \dim(V)$. Es sei $U = \text{kern } \varphi \subseteq V$ der Kern der Abbildung und $s = \dim(U)$ seine Dimension ($s \leq n$). Es sei

$$u_1, \ldots, u_s$$

eine Basis von U. Aufgrund von Satz 11.15 gibt es Vektoren

$$v_1, \ldots, v_{n-s}$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_s,\, v_1, \ldots, v_{n-s}$$

eine Basis von V ist.Wir behaupten, dass

$$w_j = \varphi(v_j),\ j = 1, \ldots, n-s\,,$$

eine Basis des Bildes ist. Es sei $w \in W$ ein Element des Bildes $\varphi(V)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Dieses v lässt sich mit der Basis als

$$v = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j$$

schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned} w &= \varphi(v) \\ &= \varphi(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi(u_i) + \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j w_j, \end{aligned}$$

so dass sich w als Linearkombination der w_j schreiben lässt. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit der w_j, $j = 1, \ldots, n-s$, sei eine Darstellung der Null gegeben,

$$0 = \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j w_j\,.$$

Dann ist

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j) = \sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j \gamma_j \varphi(v_j) = 0.$$

Also gehört $\sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j$ zum Kern der Abbildung und daher kann man

$$\sum_{j=1}^{n-s} \gamma_j v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

schreiben. Da insgesamt eine Basis vorliegt, folgt daraus, dass alle Koeffizienten null sein müssen, also sind insbesondere $\gamma_j = 0$. $\square$

Definition 12.9. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\text{rang } \varphi = \dim(\text{bild } \varphi)$$

den *Rang* von φ.

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \text{rang } \varphi$$

ausdrücken.

Korollar 12.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume der gleichen Dimension n. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 12.8 und Lemma 12.7. □

Isomorphe Vektorräume

Definition 12.11. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Eine bijektive, lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *Isomorphismus*.

Definition 12.12. Es sei K ein Körper. Zwei K-Vektorräume V und W heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus von V nach W gibt.

Lemma 12.13. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K- Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : W \longrightarrow V$$

linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.13. □

Satz 12.14. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Dann sind V und W zueinander isomorph genau dann, wenn ihre Dimension übereinstimmt. Insbesondere ist ein n-dimensionaler K-Vektorraum isomorph zum K^n.*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.14. □

Bemerkung 12.15. Eine Isomorphie zwischen einem n-dimensionalen Vektorraum V und dem Standardraum K^n ist im Wesentlichen äquivalent zur Wahl einer Basis in V. Zu einer Basis

$$\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$$

gehört die lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow V,\ e_i \longmapsto v_i,$$

die also den Standardraum in den Vektorraum abbildet, indem sie dem i-ten Standardvektor den i-ten Basisvektor aus der gegebenen Basis zuordnet. Dies definiert nach Satz 12.3 eine eindeutige lineare Abbildung, die aufgrund von Aufgabe 12.15 bijektiv ist. Es handelt sich dabei einfach um die Abbildung

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \, .$$

Die Umkehrabbildung

$$x = \varphi^{-1} : V \longrightarrow K^n$$

ist ebenfalls linear und heißt die zur Basis gehörende *Koordinatenabbildung*. Die i-te Komponente davon, also die zusammengesetzte Abbildung

$$x_i = p_i \circ x_i : V \longrightarrow K, \; v \longmapsto (\varphi^{-1}(v))_i,$$

heißt i-te *Koordinatenfunktion*. Sie wird mit v_i^* bezeichnet, und gibt zu einem Vektor $v \in V$ in der eindeutigen Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

die Koordinaten λ_i aus. Man beachte, dass die lineare Abbildung v_i^* von der gesamten Basis abhängt, nicht nur von dem Vektor v_i.

Wenn umgekehrt ein Isomorphismus

$$\varphi : K^n \longrightarrow V$$

gegeben ist, so sind die Bilder

$$\varphi(e_i), i = 1, \ldots, n,$$

eine Basis von V.

Definition 12.16. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Dann nennt man

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) = \{f : V \to W \,|\, \text{lineare Abbildung}\}$$

den *Homomorphismenraum*. Er wird versehen mit der Addition, die durch

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v)$$

definiert wird, und der Skalarmultiplikation, die durch

$$(\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v)$$

definiert wird.

Mit diesen Operationen liegt ein Vektorraum vor, siehe Aufgabe 12.16.

Matrizenkalkül

Eine lineare Abbildung
$$\varphi : K^n \longrightarrow K^m$$
ist durch die Bilder $\varphi(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, der Standardvektoren eindeutig festgelegt, und jedes $\varphi(e_i)$ ist eine Linearkombination
$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$
und damit durch die Elemente a_{ij} eindeutig festgelegt. Insgesamt ist also eine solche lineare Abbildung durch mn Elemente a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, festgelegt. Eine solche Datenmenge fasst man als eine Matrix zusammen.

Definition 12.17. Es sei K ein Körper und I und J zwei Indexmengen. Eine $I \times J$- *Matrix* ist eine Abbildung
$$I \times J \longrightarrow K, \, (i, j) \longmapsto a_{ij}.$$
Bei $I = \{1, \ldots, m\}$ und $J = \{1, \ldots, n\}$ spricht man von einer $m \times n$- *Matrix*. In diesem Fall schreibt man eine Matrix zumeist tabellarisch als
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wir beschränken uns weitgehend auf den durchnummerierten Fall. Zu jeden $i \in I$ heißt a_{ij} , $j \in J$, die i-te *Zeile* der Matrix, was man zumeist als einen *Zeilenvektor*
$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$
schreibt. Zu jedem $j \in J$ heißt a_{ij} , $i \in I$, die j-te *Spalte* der Matrix, was man zumeist als einen Spaltenvektor
$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$
schreibt. Die Elemente a_{ij} heißen die *Einträge* der Matrix. Zu a_{ij} heißt i der *Zeilenindex* und j der *Spaltenindex* des Eintrags. Man findet den Eintrag a_{ij}, indem man die i-te Zeile mit der j-ten Spalte kreuzt. Eine Matrix mit $m = n$ nennt man eine *quadratische Matrix*. Eine $m \times 1$-Matrix ist einfach ein Spaltenvektor der Länge m, und eine $1 \times n$-Matrix ist einfach ein Zeilenvektor der Länge m.

Definition 12.18. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix. Dann ist das *Matrixprodukt*
$$AB$$

diejenige $m \times p$-Matrix, deren Einträge durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

gegeben sind.

Eine solche Matrizenmultiplikation ist also nur möglich, wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt.

Als Merkregel kann man das Schema

$$(ZEILE) \begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} = ZS + EP + IA + LL + ET$$

verwenden.

Insbesondere kann man eine $m \times n$-Matrix A mit einem Spaltenvektor der Länge n (von rechts) multiplizieren, und erhält dabei einen Spaltenvektor der Länge m.

Bemerkung 12.19. Wenn man eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit einem Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ multipliziert, so erhält man

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} .$$

Damit lässt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit dem *Störvektor* $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ kurz schreiben als

$$Ax = c\,.$$

Die erlaubten Gleichungsumformungen durch Manipulation an den Zeilen, die den Lösungsraum nicht ändern, können dann durch die entsprechenden Zeilenumformungen in der Matrix ersetzt werden. Man muss dann die Variablen nicht mitschleppen.