

Vorkurs Mathematik**Arbeitsblatt 7****Aufgaben zu Gruppen**

AUFGABE 7.1. Man gebe die Gruppenaxiome in quantorenlogischer Gestalt an.

AUFGABE 7.2. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

für alle $x \in G$ ist.

AUFGABE 7.3. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Drücke das Inverse von xy durch die Inversen von x und y aus.

AUFGABE 7.4. Man konstruiere eine Gruppe mit drei Elementen.

AUFGABE 7.5. Es sei S eine Menge und

$$G = \{F : S \rightarrow S : F \text{ bijektiv}\}.$$

Zeige, dass G mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen eine Gruppe ist.

AUFGABE 7.6. Es sei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen und \mathbb{N}_+ die Menge der positiven natürlichen Zahlen. Wir betrachten die zweielementige Menge

$$V = \{+, -\}$$

und die Menge

$$Z = (V \times \mathbb{N}) \cup \{0\}.$$

Wir wollen Z zu einem Modell für die ganzen Zahlen machen. Als abkürzende Schreibweise verwenden wir n für das Paar $(+, n)$ und $-n$ für das Paar $(-, n)$. Man definiere eine Verknüpfung \oplus auf Z , die die Eigenschaft

$$(+n) \oplus (+m) = +(n + m)$$

erfüllt und die Z zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element 0 macht.

(Man darf zu $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \geq b$ die Differenz $a - b \in \mathbb{N}$ verwenden, also das eindeutig bestimmte Element, das zu b addiert a ergibt.)

Aufgaben zu Körper

AUFGABE 7.7. Man gebe die Körperaxiome in quantorenlogischer Gestalt an.

AUFGABE 7.8. Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0, 0) \text{ und } 1 = (1, 0),$$

der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.

AUFGABE 7.9. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)

$$\frac{x}{1} = x,$$

(2)

$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(3)

$$\frac{0}{z} = 0,$$

(4)

$$\frac{z}{z} = 1,$$

(5)

$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}$$

(6)

$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw},$$

(7)

$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also

$$(x - z) + (y - w) = (x + w)(y + z) - (z + w)?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt.

AUFGABE 7.10. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

AUFGABE 7.11. Beweise das allgemeine Distributivitätsgesetz für einen Körper.

AUFGABE 7.12. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c),$$

nicht gilt.

AUFGABE 7.13. Zeige, dass die Verknüpfung auf einer Geraden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Gibt es ein neutrales Element?

AUFGABE 7.14. Es sei K ein Körper mit $2 = 1 + 1 \neq 0$. Zeige, dass die Verknüpfung, die zwei Elementen a und b ihr arithmetisches Mittel $\frac{a+b}{2}$ zuordnet, nicht assoziativ ist.

AUFGABE 7.15. Wie viele „Rechenschritte“ (einschließlich „Gleichheitstests“) muss man durchführen, um die in Beispiel 7.2 beschriebene Struktur auf $\{0, 1\}$ formal als einen Körper nachzuweisen? Kann man durch eine geschickte Reihenfolge die Anzahl der Schritte reduzieren?

Die folgende Aufgabe ist eher ein kleines Projekt als eine Aufgabe.

AUFGABE 7.16. In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass die ganzen Zahlen \mathbb{Z} mit ihren wesentlichen algebraischen Eigenschaften bekannt sind. Wir wollen die rationalen Zahlen \mathbb{Q} ausgehend von \mathbb{Z} konstruieren¹ und nachweisen, dass es sich um einen Körper handelt. Dazu definieren wir auf der Produktmenge

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(z, n) : z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

zunächst eine Äquivalenzrelation durch²

$$(z, n) \sim (z', n') \text{ genau dann, wenn } n'z = nz'.$$

- (1) Zeige, dass dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist. Es sei Q die Menge der Äquivalenzklassen.
- (2) Definiere auf Q eine Addition. Man achte insbesondere auf die *Wohldefiniertheit*.³
- (3) Zeige, dass Q mit der Addition eine kommutative Gruppe ist.
- (4) Definiere auf Q eine Multiplikation.
- (5) Zeige, dass $Q \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation ebenfalls eine kommutative Gruppe ist.
- (6) Zeige, dass Q mit diesen Verknüpfungen ein Körper ist.
- (7) Wie findet man die ganzen Zahlen in Q wieder?
- (8) Stimmen Addition und Multiplikation innerhalb von \mathbb{Z} mit Addition und Multiplikation innerhalb von Q überein?
- (9) Definiere eine Ordnung auf Q derart, dass Q zu einem archimedisch angeordneten Körper⁴ wird.

¹Insbesondere wird kein Bezug auf reelle Zahlen genommen.

²Die folgende Bezeichnung soll an Zähler und Nenner erinnern. Diese Vorstellung hilft auch bei der Aufgabe, sie darf aber nicht als Beweismittel eingesetzt werden.

³Das Problem der *Wohldefiniertheit* bei einer Abbildung, die auf einer Menge von Äquivalenzklassen definiert werden soll, besteht darin, dass man die Abbildung unter Bezug auf einen Repräsentanten der Klasse definiert. Dann stellt sich die Frage, ob die Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ist.

⁴Dieser Begriff wird erst in der nächsten Vorlesung eingeführt, eine Ordnung kann man aber schon jetzt definieren.