Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur 3 mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	2	4	4	3	3	3	7	2	5	3	2	5	9	4	64
erhalt. Pkt.:																	

Note:

AUFGABE 3.1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + bi$.
(2) Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.
(3) Der *Kern* einer linearen Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(5) Der *Logarithmus zu einer Basis* $b \in \mathbb{R}_+$.
(6) Die „Kreiszahl" π (gefragt ist nach der Definition mittels trigonometrischer Funktionen).
(7) Eine *Treppenfunktion* $t : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(8) Eine *inhomogene lineare* Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

(1) Der Betrag von $z = a + bi$ ist
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$
(2) Eine Familie v_i, $i \in I$, von Vektoren in V heißt Basis, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem bilden.
(3) Man nennt
$$\text{kern } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$
den *Kern* von φ.
(4) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$
gilt.
(5) Der Logarithmus zur Basis $b > 0$ ist die Funktion
$$x \longmapsto \log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}\,.$$
(6) Es sei r die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch
$$\pi := 2r\,.$$
(7) Die Funktion
$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

(8) Es seien

$$g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen auf I. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y + h(t)$$

heißt inhomogene lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

AUFGABE 3.2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Multiplikationssatz für Determinanten.*
(2) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(3) Die *Funktionalgleichung* der Exponentialfunktion.
(4) Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

(1) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung

$$\det (A \circ B) = \det A \cdot \det B .$$

(2) Die Stetigkeit von f im Punkt a ist äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.
(3) Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y .$$

(4) Für einen beliebigen Punkt $a \in I$ ist die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$.

Aufgabe 3.3. a) Berechne

$$(4-7i)(5+3i)\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z=3+4i$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

Lösung

a) Es ist

$$(4-7i)(5+3i) \;=\; 20+21-35i+12i \;=\; 41-23i.$$

b) Das inverse Element zu z ist $\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$, also ist

$$z^{-1} \;=\; \frac{a-bi}{a^2+b^2} \;=\; \frac{3-4i}{3^2+4^2} \;=\; \frac{3}{25}-\frac{4}{25}i.$$

c) Der Abstand von z zum Nullpunkt ist $|z| \;=\; \sqrt{25} \;=\; 5$, daher ist der Abstand von z^{-1} zum Nullpunkt gleich $\frac{1}{5}$.

Aufgabe 3.4. Im $\mathbb{R}^3$ seien die zwei Untervektorräume

$$U=\{s\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-2\\9\end{pmatrix}\,|\,r,s\in\mathbb{R}\}$$

und

$$V=\{p\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}5\\2\\-4\end{pmatrix}\,|\,p,q\in\mathbb{R}\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U\cap V$.

Lösung

Jeder Vektor aus dem Durchschnitt $U\cap V$ besitzt eine Darstellung

$$s\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-2\\9\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}5\\2\\-4\end{pmatrix}\,.$$

Die Koeffiziententupel (s, t, p, q) bilden den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 7 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das wir lösen müssen. Wir ersetzen die erste Gleichung durch

$$I' = I - 3II : \ -s + 10t + q = 0$$

und die dritte Gleichung durch

$$III' = III - 4I' : \ 11s - 31t = 0\,.$$

Wir wählen $s = 31$, so dass $t = 11$ sein muss. Dies legt eindeutig q und dann auch p fest. Daher ist der Durchschnitt $U \cap V$ eindimensional und

$$31 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 + 44 \\ 31 - 22 \\ 217 + 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 9 \\ 316 \end{pmatrix}$$

ist ein Basisvektor von $U \cap V$.

Aufgabe 3.5. Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Wir lösen zuerst das lineare Gleichungssystem

$$a\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}.$$

Die Zeilenoperation $IV = 2II - III$ führt auf

$$(IV)\ \ 7b - c = -14$$

und $V = I + 2IV$ führt auf

$$(V)\ \ 15b = -25\,.$$

Damit ist

$$b \;=\; \frac{-25}{15} \;=\; -\frac{5}{3}$$

und

$$2c \;=\; 3 - b \;=\; 3 + \frac{5}{3} \;=\; \frac{14}{3},$$

also

$$c \;=\; \frac{7}{3},$$

und

$$a \;=\; -5 - 4b - c \;=\; -5 - 4\left(\frac{-5}{3}\right) - \frac{7}{3} \;=\; \frac{-15}{3} + \frac{20}{3} - \frac{7}{3} \;=\; -\frac{2}{3}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\varphi\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix} &= \varphi\left(-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+\frac{7}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right)\\
&= -\frac{2}{3}\cdot\varphi\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{5}{3}\cdot\varphi\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+\frac{7}{3}\cdot\varphi\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\\
&= -\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}-\frac{5}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{7}{3}\cdot\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-2-\frac{5}{3}+\frac{49}{3}\\ \frac{4}{3}+\frac{14}{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{38}{3}\\ \frac{18}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{38}{3} \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.6. Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{26} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{3}{26} \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{26} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Lösung

Aufgabe 3.7. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Die Determinante von A ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -10 - 2(-4) = -2$$

und die Determinante von B ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -9 + 12 = 3.$$

Das Produkt der beiden Matrizen ist

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 31 \\ 2 & -6 & -1 \\ 0 & 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned} \det AB &= \det \begin{pmatrix} 1 & 14 & 31 \\ 2 & -6 & -1 \\ 0 & 8 & 15 \end{pmatrix} \\ &= -90 + 8 - 2(14 \cdot 15 - 8 \cdot 31) \\ &= -82 - 2(210 - 248) \\ &= -82 - 2(-38) \\ &= -82 + 76 \\ &= -6. \end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem Produkt der beiden einzelnen Determinanten überein.

Aufgabe 3.8. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

Lösung

Für reelles x ist immer $-1 \leq \sin x \leq 1$. Somit ist

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Da die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$ gegen 0 konvergiert und dies auch für die negative Folge $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$ gilt, muss aufgrund des Quetschkriteriums auch die Folge $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$ gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 3.9. Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es bezeichne (1) die Stetigkeit von f im Punkt x und (2) die Eigenschaft, dass für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir müssen die Äquivalenz von (1) und (2) zeigen.

Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta\,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert.

Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in \mathbb{R}$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2).

Aufgabe 3.10. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \ln\left(\sqrt{1 + x^2}\right).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}.$$

b) Es ist

$$f''(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{1+2x^2+x^4}.$$

Aufgabe 3.11. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Lösung

Die Funktion $x \mapsto x^3$ ist überall differenzierbar und die Ableitung ist nur an der Stelle $x = 0$ gleich 0. Daher ist die Umkehrfunktion $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ für $y \neq 0$ differenzierbar. Daher ist auch f als Hintereinanderschaltung von $x \mapsto x^2$ und dieser Funktion für $x \neq 0$ differenzierbar.

Für $x = 0$ betrachten wir direkt den Differenzenquotient, also für $h \neq 0$ den Ausdruck

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}.$$

Wir betrachten positive h und können den Nenner als

$$h = \sqrt[3]{h^3} = \sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}$$

schreiben. Daher ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{h}}.$$

Für $h_n = \frac{1}{n}$ steht hier $\sqrt[3]{n}$ und dies divergiert, also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht. Daher ist f in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 3.12. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Wir müssen das Polynom

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k$$

berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -1, \\ f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$f''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Daher ist das vierte Taylor-Polynom (also die Taylor-Reihe bis zum Grad vier) gleich

$$1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4 .$$

Aufgabe 3.13. a) Unterteile das Intervall $[-4,5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4,5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Lösung

a) Die Länge des Intervalls ist 9, daher muss die Länge der Teilintervalle gleich $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1,5$ sein. Dies ergibt die Teilintervalle

$$[-4,\frac{-5}{2}],\ [\frac{-5}{2},-1],\ [-1,\frac{1}{2}],\ [\frac{1}{2},2],\ [2,\frac{7}{2}],\ [\frac{7}{2},5]\,.$$

b) Die Treppenfunktion, die abwechselnd die Werte 2 und -1 besitzt, hat das Treppenintegral

$$1,5\cdot(2-1+2-1+2-1) \;=\; 1,5\cdot 3 \;=\; 4,5.$$

Aufgabe 3.14. Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6,22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f:[6,22]\longrightarrow\mathbb{R},\ t\longmapsto f(t)=-t^3+27t^2-120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Lösung

Es sei $a \in [6,21]$ der Anfangszeitpunkt des Sonnenbades. Die Gesamteinstrahlung der Sonne in der Stunde $[a, a+1]$ ist das bestimmte Integral

$$\begin{aligned}
& S(a) \\
= & \int_a^{a+1} (-t^3 + 27t^2 - 120t)\, dt \\
= & \left(-\frac{1}{4}t^4 + 9t^3 - 60t^2\right) |_a^{a+1} \\
= & \left(-\frac{1}{4}(a+1)^4 + 9(a+1)^3 - 60(a+1)^2\right) - \left(-\frac{1}{4}a^4 + 9a^3 - 60a^2\right) \\
= & -\frac{1}{4}(4a^3 + 6a^2 + 4a + 1) + 9(3a^2 + 3a + 1) - 60(2a + 1) \\
= & -a^3 + \frac{51}{2}a^2 - 94a - \frac{205}{4}.
\end{aligned}$$

Für diese Funktion muss das Maximum im Intervall $[6,21]$ bestimmt werden. Dafür berechnen wir die Ableitung, diese ist

$$S'(a) = \left(-a^3 + \frac{51}{2}a^2 - 94a - \frac{205}{4}\right)' = -3a^2 + 51a - 94.$$

Die Nullstellenberechnung dieser Ableitung führt auf $a^2 - 17a + \frac{94}{3} = 0$ bzw. auf

$$\left(a - \frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{94}{3} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{94}{3} + \frac{289}{4} = \frac{-376 + 867}{12} = \frac{491}{12}.$$

Also ist

$$a_0 = \sqrt{\frac{491}{12}} + \frac{17}{2} \cong 14,8966 \cong 14 \text{ Uhr } 54$$

(die negative Wurzel muss nicht berücksichtigt werden, da diese zu einem a außerhalb des Definitionsbereiches führt). Die zweite Ableitung

$$S''(a) = -6a + 51$$

ist an der Stelle a_0 negativ, so dass dort das Maximum vorliegt. Da die Ableitung keine weiteren Nullstellen im Intervall besitzt, müssen die Randpunkte nicht gesondert betrachtet werden.

Aufgabe 3.15. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.

b) Bestimme eine Stammfunktion von f für $x > 1$.

Lösung

a) Zunächst ist

$$(x-1)^2(x^2+1) \;=\; (x^2-2x+1)(x^2+1) \;=\; x^4-2x^3+2x^2-2x+1.$$

Polynomdivision des Zählers durch den Nenner ergibt

$$x^5+3x^3-2x^2+x-1 \;=\; (x+2)(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)+5x^3-4x^2+4x-3.$$

Daher ist

$$\frac{x^5+3x^3-2x^2+x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \;=\; x+2+\frac{5x^3-4x^2+4x-3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}.$$

Für den rechten Bruch bestimmen wir die Partialbruchzerlegung über den Ansatz

$$\frac{5x^3-4x^2+4x-3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \;=\; \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{(x^2+1)},$$

der wiederum auf

$$5x^3-4x^2+4x-3 \;=\; a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2$$

führt.

Für $x=1$ ergibt sich

$$2 \;=\; 2b,$$

also $b=1$.

Für $x=0$ ergibt sich

$$-3 \;=\; -a+1+d,$$

also $4=a-d$.

Für $x=-1$ ergibt sich

$$-5-4-4-3 \;=\; -16 \;=\; -4a+2+4(-c+d),$$

also $\frac{18}{4}=a+c-d$.

Der Koeffizient zu x^3 führt schließlich auf

$$5 \;=\; a+c.$$

Die Subtraktion der dritten Gleichung von der zweiten führt auf

$$c \;=\; \frac{18}{4}-4 \;=\; \frac{1}{2}.$$

Aus der vierten Gleichung folgt daraus $a=\frac{9}{2}$ und aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$d \;=\; \frac{1}{2}.$$

Somit ergibt sich insgesamt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^5+3x^3-2x^2+x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \;=\; x+2+\frac{\frac{9}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{(x^2+1)}.$$

b) Eine Stammfunktion von f ist

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}\ \ln(x-1) - (x-1)^{-1} + \frac{1}{4}\ \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ \arctan x\,.$$

Aufgabe 3.16. Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Lösung

Wir schreiben $g(t) = t^2$ und $h(y) = y^3$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{h(y)} = \frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}\,.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t^2$ sind $\frac{1}{3}t^3 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) \;=\; \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3 + c\right)^{-1}} \;=\; \sqrt{\frac{-1}{2(\frac{1}{3}t^3 + c)}} \;=\; \sqrt{\frac{-1}{\frac{2}{3}t^3 + 2c}}.$$

Bei gegebenem c ist diese Wurzel genau dann definiert, wenn

$$\frac{2}{3}t^3 + 2c < 0$$

ist. Dies bedeutet

$$t < \sqrt[3]{-3c}\,.$$

Die Definitionsbereiche sind also

$$]-\infty, \sqrt[3]{-3c}[\,.$$