Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 4

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge, die aus endlich vielen Punkten bestehe. Zeige: V ist genau dann irreduzibel, wenn V einpunktig ist.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Berechne in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ den Schnitt des Zylinders mit der Kugel mit Mittelpunkt und Radius r in Abhängigkeit von a und r. Wann ist der Durchschnitt leer, wann irreduzibel?

Die folgende Aufgabe ist eine leichte Verallgemeinerung einer Aufgabe, die schon in der Zahlentheorie vorkam. Sie hilft auch in der übernächsten Aufgabe.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Zeige: Jede Quadrik der Form

$$F = aX^2 + bY^2 + c = 0$$

mit $a, b \neq 0$ hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{Z}/(p)$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Sei p eine Primzahl ≥ 3 und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Es sei ein Polynom $F \in \mathbb{Z}/(p)[X, Y]$ der Form

$$F = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta X + \epsilon Y + \eta$$

gegeben. Zeige, dass für das zugehörige Nullstellengebilde (wenn α, β, γ nicht alle null sind, so ist das eine Quadrik) die folgenden drei Alternativen bestehen.

(1) $V(F)$ besitzt mindestens einen Punkt.
(2) $F = c$ mit einer Konstanten $c \neq 0$.
(3) Es gibt eine Variablentransformation derart, dass das Polynom in den neuen Koordinaten die Gestalt $Z^2 - u$ mit einem Nichtquadrat $u \in \mathbb{Z}/(p)$ besitzt.

Die folgende Aufgabe benutzt einige weiterführende topologische Begriffe.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper.

(1) Man zeige, dass für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ die Standardtopologie feiner ist als die Zariski-Topologie.
(2) Man zeige, dass für $K[X]$ die Zariski-Topologie mit der kofiniten Topologie übereinstimmt. Gilt dies auch für $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $n > 1$?
(3) Wann ist die Zariski-Topologie T_1, wann ist sie hausdorffsch?
(4) Wie sieht die Zariski-Topologie aus, wenn K ein endlicher Körper ist?

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei V eine irreduzible, affin-algebraische Menge mit mindestens zwei Punkten und seien $P_1, \ldots, P_m \in V$ endlich viele Punkte darin. Zeige, dass dann auch $V - \{P_1, \ldots, P_m\}$ (in der induzierten Topologie) irreduzibel ist.

Aufgabe 7. (1 Punkt)

Skizziere ein Beispiel einer *zusammenhängenden*, aber nicht irreduziblen affin-algebraischen Teilmenge.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Sei R ein faktorieller Ring (man darf sich auf Hauptidealbereiche beschränken) mit Quotientenkörper $Q(R)$. Zeige: Wenn $F, G \in R[X]$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so besitzen sie aufgefasst in $Q(R)[X]$ ebenfalls keinen gemeinsamen Teiler.

Aufgabe 9. (1 Punkt)

Betrachte die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der metrischen Topologie. Ist $\mathbb{R}$ irreduzibel?

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale in $K[X_1, \ldots, X_n]$ derart, dass ihre Radikale gleich sind. Zeige, dass dann auch ihre Nullstellenmengen übereinstimmen. Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht stimmt.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Erkläre, wo der Beweis zu Satz 4.8 zusammenbricht, wenn man ihn auf mehr als zwei Variablen ausdehnen will.