Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 23

Grenzwerte von Abbildungen

Wir betrachten die beiden stetigen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto 1/x,$$

und

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto 1,$$

die beide nicht im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}$ definiert sind. Offensichtlich kann man g durch die Festlegung $g(0) := 1$ zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Bei f hingegen ist das nicht möglich: wenn man sich auf der positiven Halbgeraden 0 annähert, wachsen die Funktionswerte gegen $+\infty$, wenn man sich auf der negativen Halbgeraden 0 annähert, so wachsen die Funktionswerte gegen $-\infty$, und somit ist jede Fortsetzung nicht stetig. Diese Beobachtung führt zum Begriff des Grenzwertes einer Abbildung, den wir insbesondere im Rahmen der Differentialrechnung verwenden werden.

Definition 23.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in X$ heißt *Berührpunkt* von T, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ der Durchschnitt

$$T \cap U(a, \epsilon) \neq \emptyset\,.$$

Definition 23.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Menge aller Berührpunkte von T heißt der *Abschluss* von T. Er wird mit $\overline{T}$ bezeichnet.

Der Abschluss ist eine abgeschlossene Menge, und zwar die kleinste abgeschlossene Menge, die T umfasst.

Definition 23.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f : T \longrightarrow M$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M. Dann heißt $b \in M$ der *Grenzwert* von f in a, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in T \cap U(a, \delta)$ ist $f(x) \in U(b, \epsilon)$.

Wenn der Grenzwert exisitiert, so ist er eindeutig bestimmt.

Notation 23.4. In der Situation von Definition wird der Grenzwert, falls er existiert, mit

$$\lim_{x \in T,\, x \to a} f(x) \text{ bzw. mit } \lim_{x \to a} f(x)$$

bezeichnet.

Lemma 23.5. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es sei*

$$f : T \longrightarrow M$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M und sei $b \in M$ Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *Die Abbildung f besitzt in a den Grenzwert b.*
(2) *Zu jeder offenen Menge $V \subseteq M$ mit $b \in V$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $a \in U$ und mit $f(U \cap T) \subseteq V$.*
(3) *Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Da V offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U(b, \epsilon) \subseteq V$. Aufgrund von (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(T \cap U(a, \delta)) \subseteq U(b, \epsilon)$ und wir können $U = T \cap U(a, \delta)$ nehmen. (2) $\Rightarrow$ (3). Sei eine gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ und ein $\epsilon > 0$ gegeben. Für die offene Menge $V = U(b, \epsilon)$ gibt es nach (2) eine offene Menge U mit $a \in U$ und $f(U \cap T) \subseteq V$. Wegen der Offenheit von U gibt es auch ein $\delta > 0$ mit $U(a, \delta) \subseteq U$. Da die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U(a, \delta)$ für alle $n \geq N$. Für diese n ist dann $f(x_n) \in U(b, \epsilon)$, d.h. die Bildfolge konvergiert. (3) $\Rightarrow$ (1). Nehmen wir an, dass b nicht der Grenzwert ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in T$ gibt mit $x \in U(a, \delta)$ und mit $f(x) \notin U(b, \epsilon)$. Wir wenden diese Eigenschaft auf die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, an und erhalten eine Folge

$$x_n \in U(a, 1/n) \text{ und } f(x_n) \notin U(b, \epsilon) .$$

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen x, die Bildfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aber nicht gegen b, im Widerspruch zu (3). □

Lemma 23.6. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es seien $f : T \to \mathbb{K}$ und $g : T \to \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to a} g(x)$ existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) .$$

(2) *Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) .$$

(3) *Es sei* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in T$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. *Dann besitzt der Quotient* f/g *einen Grenzwert in* a, *und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 23.6. □

Beispiel 23.7. Wir betrachten den Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} ,$$

wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \geq -4$, ist. Für $x = 0$ ist der Ausdruck nicht definiert, und aus dem Ausdruck ist nicht direkt ablesbar, ob der Grenzwert existiert und welchen Wert er annimmt. Man kann den Ausdruck aber mit $\sqrt{x+4}+2$ erweitern, und erhält dann

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte können wir den Grenzwert von Zähler und Nenner ausrechnen, und es ergibt sich insgesamt $1/4$.

Fortsetzung von stetigen Abbildungen

Definition 23.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Es sei

$$f : T \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M und es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq X$. Dann heißt eine Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{T} \longrightarrow M$$

eine *stetige Fortsetzung* von f, wenn $\tilde{f}$ stetig ist und $\tilde{f}(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in T$.

Satz 23.9. *Es seien* L *und* M *metrische Räume,* $T \subseteq L$ *eine Teilmenge und*

$$f : T \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine stetige Abbildung. Es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \overline{T}$ *und für jedes* $a \in \tilde{T} \setminus T$ *existiere der Grenzwert* $\lim_{x\to a} f(x)$. *Dann ist die durch*

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a)\,, & \textit{falls } a \in T\,, \\ \lim_{x\to a} f(x), & \textit{falls } a \in \tilde{T} \setminus T\,, \end{cases}$$

definierte Abbildung eine stetige Fortsetzung von f auf $\tilde{T}$.

Beweis. Sei $a \in \tilde{T}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da a ein Berührpunkt von T ist und da der Grenzwert von f in a existiert (bei $a \in T$ exisitiert er aufgrund der Stetigkeit), gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f(x), \tilde{f}(a)) \leq \epsilon/2$ für alle $x \in T$, $d(x, a) \leq \delta$. Sei nun $y \in \tilde{T}$ mit $d(y, a) \leq \delta/2$. Es gibt ein $x \in T$ mit $d(x, y) \leq \delta/2$ und mit $d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon/2$. Wegen der ersten Abschätzung und der Voraussetzung an y ist $d(x, a) \leq \delta$. Insgesamt ist daher

$$d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(y)) \;\leq\; d(\tilde{f}(a), f(x)) + d(f(x), \tilde{f}(y)) \;\leq\; \epsilon.$$

□

SATZ 23.10. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge mit dem Abschluss $\overline{T}$. Es sei*

$$f : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine gleichmäßig stetige Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} : \overline{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 23.9 genügt es zu zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ für jedes $a \in \overline{T} \setminus T$ existiert. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in T, die gegen a konvergiert. Wir zeigen, dass dann auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Da diese Bildfolge in $\mathbb{K}$ ist, und $\mathbb{K}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass eine Cauchy-Folge vorliegt. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist für alle $x, x' \in T$ mit $d(x, x') \leq \delta$. Wegen der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein n_0 mit $d(x_n, a) \leq \delta/2$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ gilt daher $d(x_n, x_m) \leq \delta$ und somit insgesamt

$$d(f(x_n), f(x_m)) \;\leq\; \epsilon.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass für jede gegen a konvergente Folge der Grenzwert der Bildfolge gleich ist. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man für zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ betrachtet, die ebenfalls gegen a konvergiert, und für die der Limes der Bildfolge mit den Limiten der Teilbildfolgen übereinstimmt. □

KOROLLAR 23.11. *Es sei*

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 23.10 und aus $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

Reelle Exponentialfunktionen

Für jede positve reelle Zahl b und $n \in \mathbb{Z}$ ist b^n eine positive reelle Zahl. Für eine weitere natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_+$ und eine positive reelle Zahl y ist $y^{1/m}$ definiert. Für eine rationale Zahl $q = n/m$ ist daher $b^q = (b^n)^{1/m}$ definiert, und zwar ist dies unabhängig von der Wahl der Zähler und Nenner in der Darstellung von q.

Lemma 23.12. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Funktion*

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften.

1. *Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
2. *Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
3. *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
4. *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
5. *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 23.11. □

Lemma 23.13. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir betrachten Intervalle der Form $[-n, n]$ mit $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Monotonie ist

$$b^q \leq m := \max\left(b^n, b^{-n}\right)$$

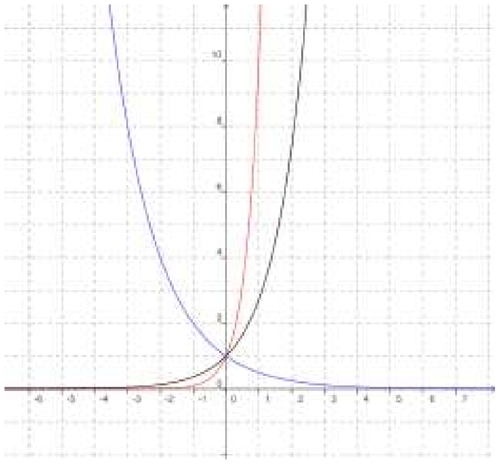
für alle $q \in [-n, n]$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Folge $(b^{1/k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1, daher gibt es insbesondere ein k derart, dass

$$\mid b^{1/k} - 1 \mid \leq \epsilon/m$$

ist. Wir setzen $\delta = 1/k$. Dann gilt für zwei beliebige rationale Zahlen $q, q' \in [-n, n]$ mit $\mid q' - q \mid \leq \delta$ unter Verwendung der Funktionalgleichung die Abschätzungen

$$\mid b^{q'} - b^q \mid = \mid b^{q'}/b^q - 1 \mid b^q \leq \mid b^{q'-q} - 1 \mid m \leq \epsilon/m \cdot m = \epsilon.$$

□



Die Exponentialfunktionen für die Basen $b = 10$, $\frac{1}{2}$ und e.

Aufgrund von Lemma 23.13 und Korollar 23.11 lassen sich die zunächst nur auf $\mathbb{Q}$ definierten Exponentialfunktionen zu stetigen Funktionen auf den reellen Zahlen fortsetzen. In diesem Sinn ist die folgende Definition zu verstehen.

Definition 23.14. Sei b eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

heißt *Exponentialfunktion* zur *Basis* b.

Lemma 23.15. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(2) *Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(3) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
(4) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
(5) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 23.12. $\square$

Eine besondere Rolle spielt die Exponentialfunktion zur Basis $b = e$. Wir werden dafür bald eine weitere Beschreibung kennenlernen, die auch für komplexe Exponenten erklärt ist.

Abbildungsverzeichnis