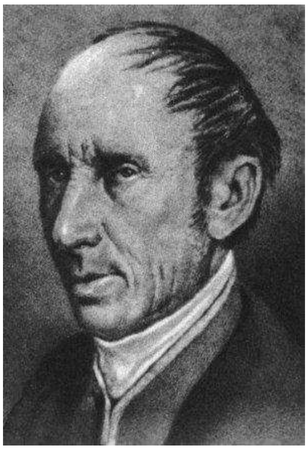
**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2009/2010**

# Mathematik I

## Vorlesung 8

### Cauchy-Folgen

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man bspw. die durch das baybylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in einem beliebigen angeordneten Körper betrachten, in dem $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 8.1. Es sei $K$ ein angeordneter Körper. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Lemma 8.2. *Es sei $K$ ein angeordneter Körper. Dann ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge genau dann, wenn folgende Bedingung gilt: zu jedem $\epsilon > 0$*

*gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *derart, dass für alle* $m \geq n_0$ *die Abschätzung* $|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon$ *gilt.*

*Beweis.* Eine Cauchy-Folge erfüllt auch die angegebene Bedingung, da man ja $n_0 = n$ setzen kann. Für die Umkehrung sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die zweite Bedingung gilt insbesondere für $\epsilon/2$, d.h. es gibt ein $n_0$ derart, dass für jedes $m \geq n_0$ die Abschätzung $|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon/2$. Damit gilt aufgrund der Dreiecksungleichung für beliebige $m, n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_n - x_{n_0}| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

so dass eine Cauchy-Folge vorliegt. □

Satz 8.3. *Es sei $K$ ein angeordneter Körper. Dann ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*

*Beweis.* Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit Grenzwert $x$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein $n_0$ mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| = \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. □

Definition 8.4. Es sei $K$ ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $K$. Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \mapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Lemma 8.5. *Es sei $K$ ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

*Beweis.* Es sei $b \in K$ eine obere Schranke, also $x_n \leq b$ für alle Folgenglieder $x_n$. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes $n_0$ ein $m > n_0$ gibt mit $x_m - x_{n_0} \geq \epsilon$ (wir können die Betragstriche weglassen). Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch

$$n_0 = 0 ,$$

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \geq \epsilon ,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \geq \epsilon ,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedes Axioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\epsilon > b - x_0 \,.$$

Die Summe der ersten $k$ Differenzen der Teilfolge $x_{n_j}$, $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} x_{n_k} - x_0 &= (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \ldots + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x_{n_0}) \\ &\geq k\epsilon \\ &> b - x_0 . \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $b$ eine obere Schranke der Folge ist. □

## Der Körper der reellen Zahlen

Definition 8.6. Es sei $K$ ein angeordneter Körper. Er heißt *vollständig* oder *vollständig angeordnet*, wenn jede Cauchy-Folge in $K$ konvergiert (also in $K$ einen Konvergenzpunkt besitzt).

Definition 8.7. Einen archimedisch angeordneten vollständigen Körper nennt man *Körper der reellen Zahlen*. Er wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Die reellen Zahlen sind also ein vollständig und archimedisch angeordneter Körper. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen vollständig und archimedisch angeordnete Körper sind, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, der alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen Isomorphismus).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man die Vorstellung einer „kontinuierlichen Zahlengerade" zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung. Dies wird im folgenden Beispiel und in den Aufgaben durchgeführt.

Beispiel 8.8. Wir konstruieren, ausgehend von den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper, also ein Modell für den Körper der reellen Zahlen. Es sei

$$C = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{Cauchyfolge in } \mathbb{Q}\}$$

die Menge aller Cauchyfolgen mit rationalen Werten. Wir definieren in $C$ eine Relation durch

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ falls } (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ eine Nullfolge ist} \,.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation, siehe Aufgabe 8.9. Wir definieren nun die Quotientenmenge unter dieser Relation als reelle Zahlen, also

$$\mathbb{R} = C/\sim \,.$$

Unter dieser Identifzierungsabbildung werden also alle Nullfolgen zu null gemacht, und zwei rationale Folgen werden miteinander identifiziert, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Wir schreiben die zugehörigen Äquivalenzklassen als $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

Auf $C$ gibt es die gliedweise Addition und Multiplikation. Auf der Quotientenmenge führt dies zum Ansatz

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]+[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \text{ und } [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}] .$$

Dies ergibt eine wohldefinierte Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$, siehe Aufgabe 8.10. Durch die konstanten Folgen zu einer rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ ergibt sich eine Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto (q)_{n\in\mathbb{N}},$$

die mit der Addition und der Multiplikation verträglich ist. Mit diesen Operationen und mit 0 und 1 (also der konstanten Nullfolge und der konstanten Einsfolge) ist $\mathbb{R}$ ein Körper, siehe Aufgabe 8.17.

Für jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt die ausschließende Alternative: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, oder es gibt ein $q > 0$ mit $x_n \geq q$ für fast alle[1] $n \in \mathbb{N}$, oder es gibt ein $q < 0$ mit $x_n \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Darauf aufbauend kann man $\mathbb{R}$ in null, in positve und in negative reelle Zahlen einteilen bzw. eine (totale) Ordnungsrelation darauf definieren. Damit wird $\mathbb{R}$ zu einem angeordneten Körper, der auch archimedisch ist, siehe Aufgabe 8.18. In einem letzten Schritt kann man zeigen, dass $\mathbb{R}$ auch vollständig ist, siehe Aufgabe 8.19.

Statt von einem vollständig und archimedisch angeordneten Körper werden wir von nun an von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sprechen. Als Beweismittel sind aber lediglich die genannten Axiome erlaubt.

## Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

SATZ 8.9. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum.*

*Beweis.* Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Es sei $x_0 \in M$ und $y_0$ eine obere Schranke für $M$, d.h. es ist $x \leq y_0$ für alle $x \in M$. Wir konstruieren zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n \in M$ wachsend, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist und jedes $y_n$ eine obere Schranke von $M$ ist (so dass insbesondere $x_n \leq y_n$ für alle $n$ ist), und so, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dabei gehen wir induktiv vor, d.h. die beiden Folgen seien bis $n$ bereits definiert und erfüllen die gewünschten Eigenschaften. Wir setzen

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n, \ \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ \text{ein beliebiger Punkt aus } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

[1]Das bedeutet für alle bis auf endlich viele.

und

$$y_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ y_n \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Dies erfüllt die gewünschten Eigenschaften, und es ist

$$y_n - x_n \leq (\frac{1}{2})^n (y_0 - x_0)\,,$$

da in beiden Fällen der Abstand zumindest halbiert wird. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und nach oben beschränkt ist, handelt es sich nach Lemma 8.5 um eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit besitzt die konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $x$. Ebenso ist die fallende Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach unten beschränkt ist, eine Cauchy-Folge mit demselben Grenzwert $x$. Wir behaupten, dass dieses $x$ das Supremum von $M$ ist. Wir zeigen zuerst, dass $x$ eine obere Schranke von $M$ ist. Sei dazu $z > x$ angenommen für ein $z \in M$. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x$ konvergiert, gibt es insbesondere ein $n$ mit

$$x \leq y_n < z$$

im Widerspruch dazu, dass jedes $y_n$ eine obere Schranke von $M$ ist. Für die Supremumseigenschaft müssen wir zeigen, dass $x$ kleiner oder gleich jeder oberen Schranke von $M$ ist. Sei dazu $u$ eine obere Schranke von $M$ und nehmen wir an, dass $x > u$ ist. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x$ konvergiert, gibt es wieder ein $n$ mit

$$u < x_n \leq x$$

im Widerspruch dazu, dass $u$ eine obere Schranke ist. Also liegt wirklich das Supremum vor. □

Korollar 8.10. *Eine beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 8.5 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. □

Definition 8.11. Es sei $K$ ein angeordneter Körper. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}\,,$$

in $K$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

gegen null konvergiert.

Satz 8.12. *(Intervallschachtelung) Es sei $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

*aus genau einem Punkt* $x \in \mathbb{R}$*. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 8.10. ☐

DEFINITION 8.13. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper $K$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N\,.$$

Sie heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $s \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \leq s \text{ für alle } n \geq N\,.$$

## Abbildungsverzeichnis