Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 38

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 38.1. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y\,.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = y \text{ mit } y(0) = 3 \text{ und } y'(0) = -2\,.$$

Aufgabe 38.2. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Bestimme zur Schrittweite $s = \frac{1}{k}$ die approximierenden Punkte P_n gemäß des Polygonzugverfahrens. Bestimme insbesondere P_k. Was passiert mit P_k für $k \to \infty$?

Aufgabe 38.3. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y \text{ mit } y(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 38.4. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^3 - y - 4t + 2t^2 \text{ mit } y(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 38.5. Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 38.6. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} xt^2 - y^2t \\ xy \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 38.7. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^3 - yt^2 \\ tx^2y - \sinh t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 38.8. (6 Punkte)

a) Schreibe ein Computerprogramm, das zu dem Vektorfeld aus Beispiel 38.7 zu einem Startzeitpunkt t_0, einem Startpunkt $P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und einer vorgegebenen Schrittweite $s > 0$ die approximierenden Punkte P_n berechnet.

b) Berechne mit diesem Programm die Punkte P_n für

(1) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{10}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10$.

(2) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{100}$, $n = 100$.

(3) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(4) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1,001 \\ 0,999 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(5) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1,01 \\ 0,99 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(6) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(7) $t_0 = -3$, $P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{10}$, $n = 100$.

(8) $t_0 = 0$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s = \frac{1}{1000}$, $n = 1000$.

(Abzugeben ist lediglich Teil b), und zwar in einer leserfreundlichen Form.)

Aufgabe 38.9. (5 (1+2+2) Punkte)

a) Übersetze das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y(1) = 1$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

b) Bestimme mit dem Polygonzugverfahren zur Schrittweite $s = \frac{1}{2}$ die Näherungspunkte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 für dieses System.

c) Berechne den Wert des zugehörigen Streckenzuges an der Stelle $t = \pi/2$.

Aufgabe 38.10. (4 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + t^2 y - 5ty^2 + 3t^3 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 38.11. (4 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = y + (y')^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 38.12. (4 Punkte)
Finde alle polynomialen Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = 9y - 3ty' + y''\,.$$

Aufgabe 38.13. (6 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x^2t - xyt + y^3 - yt^3 \\ x^3 - xy^2 + \cos t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.