Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 27

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 27.1. Bestimme, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$a \longmapsto \int_{-1}^{2} at^2 - a^2 t \, dt$$

ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

Aufgabe 27.2. Nach neuesten Studien zur Aufnahmefähigkeit von durchschnittlichen Studierenden wird die Aufmerksamkeitskurve am Tag durch

$$[8, 18] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = -x^2 + 25x - 100,$$

beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden und $y = f(x)$ ist die Aufnahmefähigkeit in Mikrocreditpoints pro Sekunde. Wann muss man eine ein einhalb stündige Vorlesung ansetzen, damit die Gesamtaufnahme optimal ist? Wieviele Mikrocreditpoints werden dann in dieser Vorlesung aufgenommen?

Aufgabe 27.3. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, genau dann gegen b konvergiert, wenn

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

gilt, wenn also die Funktion für $x \to +\infty$ den Grenzwert b besitzt.

Aufgabe 27.4. Sei I ein Intervall, r ein Randpunkt von I und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_a^r f(t) \, dt$$

nicht vom gewählten Startpunkt $a \in I$ abhängt.

Aufgabe 27.5. Sei $I =]r, s[$ ein beschränktes offenes Intervall und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die sich auf $[r, s]$ stetig fortsetzen lässt. Zeige, dass dann das uneigentliche Integral

$$\int_r^s f(t)\, dt$$

existiert.

Aufgabe 27.6. Formuliere und beweise Rechenregeln für uneigentliche Integrale (analog zu Lemma 23.5.)

Aufgabe 27.7. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^2 - 3x + 5}{x^4 + 2x^3 + 5x + 8}\, dx$$

existiert.

Aufgabe 27.8. Bestimme das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-t}\, dt\,.$$

Aufgabe 27.9. Es sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall und es sei

$$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge in I mit dem Grenzwert a und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in I mit dem Grenzwert b. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ existiert. Zeige, dass die Folge

$$w_n = \int_{x_n}^{y_n} f(t)\, dt$$

gegen das uneigentliche Integral konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.10. (2 Punkte)

Berechne die Energie, die nötig wäre, um die Erde, ausgehend von der jetzigen Lage relativ zur Sonne, unendlich weit von der Sonne zu entfernen.

Aufgabe 27.11. (5 Punkte)
Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 27.12. (5 Punkte)
Man gebe ein Beispiel für eine unbeschränkte, stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$ existiert.

Aufgabe 27.13. (2 Punkte)
Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 27.14. (4 Punkte)
Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^3-3x+5}{x^4+2x^3+5x+8}\,dx$$

existiert.

Aufgabe 27.15. (6 Punkte)
Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

existiert.
(Versuche nicht, eine Stammfunktion für den Integranden zu finden.)

Aufgaben zum Hochladen[1]

Aufgabe 27.16. (6 Punkte)

Erstelle für die rationale Funktion $f(x) = \frac{x-2}{x^2(x-3)}$ eine Skizze, die die reelle Partialbruchzerlegung dieser Funktion darstellt.

Aufgabe 27.17. (6 Punkte)

Man fertige eine Skizze an, die die eulersche Konstante als einen Flächeninhalt darstellt.

[1]Bei einer Aufgabe zum Hochladen geht es darum, ein Bild (Animation etc.) mit einem Programm zu erstellen, über Wikimedia Commons hochzuladen (genau kategorisieren) und es in den Kurs einzubinden (siehe Materialseite des Kurses). Die Arbeit muss in einem auf Commons erlaubten Format erstellt und unter die CC-by-sa 3.0-Lizenz gestellt werden. Unbedingt das Urheberrecht beachten! Es gibt keinen genauen Abgabetermin, Nachbesserungen sind möglich und erwünscht. Bewertung letztlich durch den Dozenten. Die Gutschrift auf das Punktekonto erfolgt am Ende des Semesters vor der Klausur.