Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 20

Potenzreihen

Definition 20.1. Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und z eine weitere reelle Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die *Potenzreihe* in z zu den Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Basis $z \in \mathbb{R}$ ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man z variieren lässt und dann die Potenzreihe im Konvergenzbereich eine Funktion in z darstellt.

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon das letzte Mal kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die für $|z| < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1-z)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die Exponentialreihe, die für jede reelle Zahl konvergiert und zur reellen Exponentialfunktion führt. Ihre Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus.

Satz 20.2. *Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine Potenzreihe und es gebe ein $z_0 \neq 0$ derart, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ konvergiere. Dann gibt es ein positives R (wobei $R = \infty$ erlaubt ist) derart, dass für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| < R$ die Reihe konvergiert. Auf einem solchen (offenen) Konvergenzintervall stellt die Potenzreihe $f(z)$ eine stetige Funktion dar.

Beweis. Der Beweis beruht auf einer systematischen Untersuchung für Potenzreihen und dem Limes von Funktionenfolgen. Wir werden ihn nicht durchführen. □

Definition 20.3. Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeller Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Auch für die folgende Aussage geben wir keinen Beweis.

LEMMA 20.4. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen reeller Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k)\,.$$

Die Exponentialreihe und die Exponentialfunktion

DEFINITION 20.5. Für jedes $z \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z.

Dies ist also die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \ldots\,.$$

SATZ 20.6. *Für jedes* $z \in \mathbb{R}$ *ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

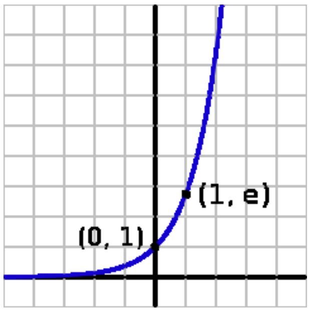
absolut konvergent.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}| = |\frac{z}{n+1}| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2|z|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. $\square$

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die reelle Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Definition 20.7. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt (reelle) *Exponentialfunktion.*

Satz 20.8. *Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y\,.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Fakt ***** absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $x+y$ gleich

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

Korollar 20.9. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \exp z,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\exp 0 = 1$.
(2) *Für jedes $z \in \mathbb{R}$ ist* $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp z \neq 0$.
(3) *Für ganze Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
(4) *Für jedes z ist* $\exp z \in \mathbb{R}_+$.
(5) *Für $z > 0$ ist* $\exp z > 1$ *und für $z < 0$ ist* $\exp z < 1$.
(6) *Die reelle Exponentialfunktion ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp z \cdot \exp(-z) \;=\; \exp(z-z) \;=\; \exp 0 \;=\; 1$$

aufgrund von Fakt *****. (3) folgt aus Fakt ***** und (2). (4). Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp z \;=\; \exp(\frac{z}{2}+\frac{z}{2}) \;=\; \exp\frac{z}{2}\cdot\exp\frac{z}{2} \;=\; (\exp\frac{z}{2})^2 \;\geq\; 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \;>\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n \;=\; \exp(-x),$$

da ja für gerades n die Summationsglieder übereinstimmen und für ungerades n die linke Seite größer als die rechte ist. Also ist $\exp x > 1$. (6). Für reelle $w > z$ ist $w - z > 0$ und daher nach (5) $\exp(w-z) > 1$, also

$$\exp w \;=\; \exp(w-z+z) \;=\; \exp(w-z)\exp z \;>\; \exp z.$$

□

Mit der Exponentialreihe definieren wir die *eulersche Zahl*.

Definition 20.10. Die reelle Zahl

$$e := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

heißt *eulersche Zahl*.

Diese Zahl hat den Wert

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots \cong 2,71\ldots.$$

Statt $\exp z$ werden wir in Zukunft auch e^z schreiben.

Satz 20.11. *Die reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \exp x,$$

ist stetig und stiftet eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{R}_+$.

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Fakt *****, da die Exponentialfunktion ja über eine Potenzreihe definiert ist. Nach Fakt ***** (4) liegt das Bild in $\mathbb{R}_+$ und ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall. Die Unbeschränktheit des Bildes folgt aus Fakt ***** (3), woraus wegen Fakt ***** (2), folgt, dass auch beliebig kleine positive reelle Zahlen zum Bild gehören. Daher ist das Bild gleich $\mathbb{R}_+$. Die Injektivität ergibt sich aus Fakt ***** (6). □

Der natürliche Logarithmus

Definition 20.12. Der *natürliche Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist definiert als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion.

Satz 20.13. *Der natürliche Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist eine stetige streng wachsende Funktion, die eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ stiftet. Dabei gilt

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Dies folgt aus Fakt *****, Fakt *****, Fakt ***** und Fakt *****. □

Definition 20.14. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ definiert man die *Exponentialfunktion zur Basis b* als

$$b^x := \exp(x \log b).$$

Satz 20.15. *Für die Exponentialfunktionen*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a^x,$$

gelten die folgenden Rechenregeln (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $x, y \in \mathbb{R}$)

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
(2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.
(4) $(ab)^x = a^x b^x$.

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Definition 20.16. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ wird der *Logarithmus zur Basis b* durch

$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$

definiert.

Satz 20.17. *Die Logarithmen zur Basis b erfüllen die folgenden Rechenregeln.*

(1) *Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.*
(2) *Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$*
(3) *Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.*

(4) *Es gilt*

$$\log_a y \;=\; \log_a(b^{\log_b y}) \;=\; \log_b y \cdot \log_a b.$$

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Abbildungsverzeichnis