Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 26

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 26.1. Zeige, dass der Ring $K[X,Y,Z]/(X^2+Y^3+YZ^3)$ genau in $P=(0,0,0)$ singulär ist.

Aufgabe 26.2. Zeige, dass der Ring $K[X,Y,Z]/(X^2+Y^3+Z^5)$ genau in $P=(0,0,0)$ singulär ist.

Aufgabe 26.3. Zeige, dass es auf den A- und den D-Singularitäten und auf der E_6 und der E_7-Singularität glatte Kurven gibt, die durch den singulären Punkt laufen.

Aufgabe 26.4. Bestätige, dass die in Beispiel 26.3 angegebenen Polynome $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ in der Tat invariant sind, und dass die dort angegebene Relation besteht.

Aufgabe 26.5. Zeige, dass es einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^2+Y^3+Z^5) \longrightarrow \mathbb{C}[R,S,T]/(RS-T^2)$$

gibt.

Aufgabe 26.6. Zeige, dass die Ringe der ADE-Singularitäten eine positive Graduierung besitzen. Man gebe diese jeweils an.

Wir erinnern an folgende Definition.

Zu einer Gruppe G heißt die von allen Kommutatoren $aba^{-1}b^{-1}$, $a,b \in G$, erzeugte Untergruppe die *Kommutatorgruppe* von G. Sie wird mit $K(G)$ bezeichnet.

Die Kommutatorgruppe ist nach Lemma 20.5 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2011)) ein Normalteiler, die Restklassengruppe $G/K(G)$ nennt man auch die *Abelianisierung* von G.

Aufgabe 26.7. Bestimme zu den endlichen Untergruppen $G \subseteq \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ jeweils die Kommutatoruntergruppe und die Abelianisierung.

Aufgabe 26.8. Zeige, dass $\mathbb{R}^3 \setminus \{P\}$ einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 26.9. Es sei

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus und

$$\varphi\colon \mathbb{C}^\times \cong \mathbb{C}-\operatorname{Spek}\left(\mathbb{C}[T, T^{-1}]\right) \longrightarrow \mathbb{C}^\times \cong \mathbb{C}-\operatorname{Spek}\left(\mathbb{C}[T, T^{-1}]\right)$$

die zugehörige Spektrumsabbildung zwischen den Spektra der Monoidringe. Wie sieht die zugehörige Abbildung der Fundamentalgruppen aus?

Aufgabe 26.10. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow S^1,\, t \longmapsto (\cos t\,,\, \sin t\,)\,,$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 26.11. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\},\, z \longmapsto \exp z,$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 26.12. Es sei $R = \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ eine endlich erzeugte positiv-graduierte $\mathbb{C}$-Algebra und $X = \mathbb{C}-\operatorname{Spek}(R) \subseteq \mathbb{C}^n$ das $\mathbb{C}$-Spektrum von R. Es sei $S = \{z \in X \mid \, || z ||= 1\}$ die „Sphäre“ von X (bezüglich der gegebenen Einbettung). Zeige, dass es eine Homotopie zwischen $X \setminus \{0\}$ und S gibt. Man folgere, dass die punktierte Fundamentalgruppe von R gleich der Fundamentalgruppe von S ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.13. (4 Punkte)

Zeige, dass es auf der E_8-Singularität keine glatte Kurve gibt, die durch den singulären Punkt läuft.