Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Vorlesung 11

Numerische Bedingungen für endliche Symmetriegruppen im Raum

Lemma 1. *Es sei $G \subseteq \mathrm{SO}_3$ eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen linearen Isometrien im $\mathbb{R}^3$. Zu einer Halbachse H von G sei*

$$G_H = \{g \in G : g(H) = H\}.$$

Dann sind für zwei äquivalente Halbachsen H_1 und H_2 die Gruppen G_{H_1} und G_{H_2} isomorph. Insbesondere besitzen sie die gleiche Ordnung.

Beweis. Es sei $g(H_1) = H_2$, was es gibt, da die beiden Halbachsen nach Voraussetzung äquivalent sind. Dann hat man aber sofort den Gruppenisomorphismus

$$G_{H_1} \longrightarrow G_{H_2},\ f \longmapsto g \circ f \circ g^{-1}.$$

Wegen

$$(gfg^{-1})(H_2)=gf(g^{-1}(H_2))=gf(H_1)=g(H_1)=H_2$$

führt dieser innere Automorphismus von G in der Tat die beiden Gruppen ineinander über. □

Bei G_H handelt es sich trivialerweise um eine Untergruppe von G. Man nennt sie die *Isotropiegruppe* zur Halbachse H. Das Lemma besagt also, dass äquivalente Halbachsen isomorphe Isotropiegruppen besitzen. Wenn $n = \#(G)$ ist und H eine Halbachse in der Halbachsenklasse K, und die Untergruppe G_H k Elemente besitzt, so gibt es in K genau n/k verschiedene Halbachsen. Die fixierte Halbachse H definiert nämlich eine surjektive Abbildung

$$G \longrightarrow K,\ f \longmapsto f(H).$$

Dabei geht $f \in G_H$ auf H, und ebenso gibt es für jede Halbachse $H' \in K$ genau k Urbilder.

Lemma 2. *Es sei $G \subseteq \mathrm{SO}_3$ eine endliche Untergruppe der Ordnung n in der Gruppe der eigentlichen linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$. Es seien $K_1, \ldots, K_m$ die verschiedenen Halbachsenklassen zu G, und zu jeder dieser Klassen sei $n_i, i = 1, \ldots, m$, die Ordnung der Gruppe $G_H, H \in K_i$, die nach Lemma 11.1 unabhängig von $H \in K_i$ ist. Dann ist*

$$2(1-\frac{1}{n}) = \sum_{i=1}^{m}(1-\frac{1}{n_i})$$

Beweis. Für zwei gegenüberliegende Halbachsen H und $-H$ gilt $G_H = G_{-H}$. Dagegen gilt für zwei Halbachsen H_1 und H_2, die nicht zur gleichen Achse gehören (also insbesondere verschieden sind), die Beziehung $G_{H_1} \cap G_{H_2} = \{\mathrm{id}\}$, da eine Isometrie mit zwei Fixachsen die Identität sein muss. Da G die Vereinigung aller G_H, $H \in \mathfrak{H}(G)$, ist, liegt eine Vereinigung

$$G - \{\mathrm{id}\} = \bigcup_{H \in \mathfrak{H}(G)} (G_H - \{\mathrm{id}\})$$

vor, wobei rechts jedes Gruppenelement $g \neq \mathrm{id}$ genau zweimal vorkommt. Daher ist

$$2(n-1) = \sum_{H \in \mathfrak{H}(G)} (\mathrm{ord}\ G_H - 1)\,.$$

Die Halbachsenklasse K_i enthält n/n_i Elemente. Daher ist

$$2(n-1) = \sum_{H \in \mathfrak{H}(G)} (\mathrm{ord}\ G_H - 1) = \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{n_i}(n_i - 1).$$

Mittels Division durch n ergibt sich die Behauptung. □

Lemma 3. *Die numerische Gleichung*

$$2(1 - \frac{1}{n}) = \sum_{i=1}^{m}(1 - \frac{1}{n_i})$$

mit $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ und mit $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_m$ besitzt folgende Lösungen.

(1) $m = 2$ *und* $n = n_1 = n_2$.
(2) *Bei* $m = 3$ *gibt es die Möglichkeiten*
  (a) $n_1 = n_2 = 2$ *und* $n = 2n_3$,
  (b) $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 3$ *und* $n = 12$,
  (c) $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$ *und* $n = 24$,
  (d) $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ *und* $n = 60$.

Beweis. Bei $m = 0$ ist die rechte Seite null und daher folgt $n = 1 < 2$ aus der linken Seite. Bei $m = 1$ muss gelten $n_1 = \frac{n}{-n+2}$, was bei $n \geq 2$ keine Lösung besitzt. Bei $m = 2$ erhält man die Bedingung

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\,,$$

woraus sich $n_1 = n_2 = n$ ergibt. Bei $m = 3$ schreibt sich die Bedingung als

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

mit $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Die linke Seite ist > 1. Daher muss wegen $n_i \geq 2$ mindestens eines der $n_i = 2$ sein. Sei also $n_1 = 2$. Bei $n_2 = 2$ gibt es genau die Lösung $n = 2n_3$ mit beliebigem $n_3 \geq 2$. Sei also $n_2 \geq 3$. Bei $n_2 \geq 4$ wäre die rechte Seite wieder ≤ 1, so dass $n_2 = 3$ gelten muss. Der Wert $n_3 = 3$ führt zur Lösung $n = 12$, der Wert $n_3 = 4$ führt zur Lösung $n = 24$ und der Wert

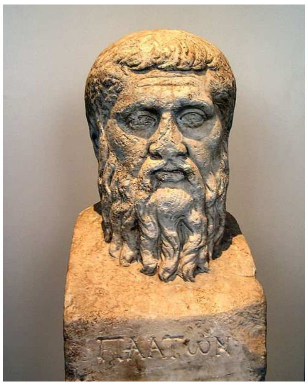
$n_3 = 5$ führt zur Lösung $n = 60$. Bei $n_3 \geq 6$ wird die rechte Seite wieder ≤ 1, so dass es keine weitere Lösung gibt. Bei $m \geq 4$ hat man eine Bedingung der Form

$$m - 2 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \ldots + \frac{1}{n_m},$$

die keine Lösung besitzt, da die rechte Seite $\leq m - 2$ ist, da die ersten vier Summanden maximal 2 ergeben und die weiteren durch $m - 4$ abgeschätzt werden können. $\square$

Geometrische Realisierungen der endlichen Symmetriegruppen

Das letzte Lemma enthält die entscheidenden numerischen Bedingungen, wie eine endliche Symmetriegruppe im $\mathbb{R}^3$ aussehen kann. Wenn man von der trivialen Gruppe absieht, bei der $m = 0$ gilt, so erfasst dieses Lemma alle endlichen Gruppen, da bei $m \geq 1$ die Gruppe der Drehungen an einer Achse mindestens zwei Elemente besitzt. Jede der angegebenen Bedingungen lässt sich im Wesentlichen eindeutig durch eine endliche Symmetriegruppe realisieren. Das geometrische Objekt ist aber nicht eindeutig bestimmt, wie schon das „duale Paar“ Würfel und Oktaeder zeigt.



Plato (427-347 v. C.) sagte: „die Bedeutung der Geometrie beruht nicht auf ihrem praktischen Nutzen, sondern darauf, daß sie ewige und unwandelbare Gegenstände untersucht und danach strebt, die Seele zur Wahrheit zu erheben“.

Lemma 4. *Es sei $G \subset \mathrm{SO}_3$ eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$ mit einer fixierten Halbachsenklasse K. Dann ist die Abbildung*

$$G \longrightarrow \mathrm{Perm}\,(K),\ g \longmapsto \sigma_g : H \mapsto g(H),$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Nach der Definition von Halbachsenklasse ist mit $H \in K$ auch $g(H) \in K$ für alle $g \in G$. Daher ist die Abbildung σ wohldefiniert. Die Identität geht auf die Identität. Seien $f, g \in G$. Dann ist sofort

$$\sigma_{g \circ f}(H) = (g \circ f)(H) = g(f(H)) = g(\sigma_f(H)) = \sigma_g(\sigma_f(H)) = (\sigma_g \circ \sigma_f)(H).$$

$\square$

Lemma 5. *Es sei $G \subseteq \mathrm{SO}_3$ eine endliche Untergruppe der Ordnung n der Gruppe der eigentlichen linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$ mit zwei verschiedenen Halbachsenklassen zu G. Dann ist G die zyklische Gruppe der Drehungen zum Winkel $2\pi/n$ um eine einzige fixierte Drehachse.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 11.2 und Lemma 11.3 muss $n = n_1 = n_2$ sein und jede Halbachsenklasse enthält nur eine Halbachse. Daher gibt es überhaupt nur eine Drehachse und diese Bewegungsgruppe ist isomorph zu einer Bewegungsgruppe in der senkrechten Ebene, also nach Satz 10.5 isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung n. □

In diesem Fall gibt es also zwei Halbachsenklassen, die jeweils aus nur einer Halbachse bestehen.

Lemma 6. *Es sei $G \subset \mathrm{SO}_3$ eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$ vom Typ $(2, 2, k)$. Dann ist G isomorph zur Diedergruppe D_k.*

Beweis. Es gibt drei Halbachsenklassen, und zwar zwei mit der Ordnung zwei (und je k Halbachsen) und eine mit der Ordnung k und 2 Halbachsen. Bei $k \geq 3$ müssen die zwei Halbachsen aus der dritten Klasse zueinander äquivalent sein, und bei $k = 2$ muss jede Halbachse zu ihrem Gegenüber äquivalent sein. Wir bezeichnen die Achse zu K_3 mit A_3. Jedes Gruppenelement mit einer anderen Drehachse muss die beiden Halbachsen aus K_3 ineinander überführen, so dass alle anderen Achsen senkrecht zu A_3 stehen. Es sei g eine erzeugende Drehung um A_3. Zu einer Halbachse H_1 aus K_1 sind die

$$g^i(H_1),\ i = 0, \ldots, k-1\,,$$

genau alle Halbachsen aus K_1. Diese bilden ein regelmäßiges k-Eck in der zu A_3 senkrechten Ebene. Entsprechendes gilt für $g^i(H_2)$ mit $H_2 \in K_2$. Jede Halbdrehung um eine der Achsen aus K_1 überführt die Halbachsen aus K_2 in ebensolche. Daher liefern die Halbachsen aus K_2 eine „Halbierung“ des k-Ecks. Somit handelt es sich insgesamt um die (uneigentliche) Symmetriegruppe eines regelmäßigen k-Ecks, d.h. um eine Diedergruppe D_k. □

In diesem Fall bestehen die beiden Halbachsenklassen der Ordnung zwei einerseits aus den Eckpunkten (oder Eckhalbachsen) und andererseits aus den Seitenmittelpunkten (oder Seitenmittelhalbachsen) des zugrunde liegenden regelmäßigen $n/2$-Ecks. Bei $n/2$ gerade sind gegenüberliegende Halbachsen äquivalent, bei $n/2$ ungerade nicht. Bei $n = 4$ ist die Diedergruppe (also D_2) kommutativ und isomorph zur Kleinschen Vierergruppe.

Lemma 7. *Es sei $G \subset \mathrm{SO}_3$ eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$ vom Typ $(2, 3, 3)$. Dann ist G die Tetraedergruppe und damit isomorph zur alternierenden Gruppe A_4.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es drei Halbachsenklassen der Ordnung $2,3$ und 3, ihre Anzahl ist daher $6,4$ und 4. Betrachten wir eine Halbachsenklasse K der Ordnung 3 mit ihren vier äquivalenten Halbachsen und den zugehörigen Gruppenhomomorphismus (Lemma 11.4)

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(K),\ g \longmapsto \sigma_g .$$

Sei $g \in G$ eine Dritteldrehung um eine Halbachse $H \in K$. Sie lässt H fest und bewirkt eine Permutation der drei anderen Halbachsen in der Klasse. Diese Permutation kann nicht die Identität sein, da sonst g mindestens zwei Achsen fest ließe und damit g die (Raum-)Identität wäre. Da g die Ordnung 3 besitzt, muss diese Permutation ein Dreierzykel sein. Insbesondere gehören die vier Halbachsen zu verschiedenen Achsen, und die Doppeldrehung g^2 bewirkt den anderen Dreierzykel. Da man diese Überlegung mit jeder der vier Halbachsen anstellen kann, sieht man, dass G sämtliche Dreierzykel der Permutationsgruppe der vier Halbachsen bewirkt. Das Bild des Gruppenhomomorphismus ist daher genau die alternierende Gruppe A_4 und damit ist $G \cong A_4$. Diese ist nach Aufgabe 10.5 isomorph zur Tetraedergruppe. □

In der vorstehenden Aussage kann man auch direkt erkennen, dass es sich um eine Tetradergruppe handeln muss. Dazu markieren wir auf jeder der vier Halbachsen den Punkt mit dem Abstand 1 zum Nullpunkt. Aus dem Beweis des Lemmas folgt, dass je zwei solche Punkte den gleichen Abstand voneinander haben (und dass die Winkel der Halbachsen zueinander alle gleich sind). Daher bilden diese vier Punkte die Eckpunkte eines Tetraeders. Die gegenüberliegenden Halbachsen entsprechen den Seitenmittelpunkten der Tetraederflächen. Das Halbachsensystem der Ordnung zwei enthält die Halbachsen zu den Drehachsen der Komposition von zwei Dritteldrehungen um zwei verschiedene Achsen. Diese Halbachsen entsprechen den Kantenmittelpunkten.

Lemma 8. *Es sei $G \subset \mathrm{SO}_3$ eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$ vom Typ $(2,3,4)$. Dann ist G die Würfelgruppe und damit isomorph zur Permutationsgruppe S_4.*

Beweis. Wir betrachten die Halbachsenklasse K der Ordnung drei, die also 8 zueinander äquivalente Halbachsen besitzt. Zu einer solchen Halbachse H muss die entgegengesetzte Halbachse ebenfalls in einer der Halbachsenklassen liegen, und zwar in einer mit der gleichen Ordnung. Daher gehört auch $-H$ zu K, so dass an K insgesamt vier Achsen beteiligt sind. Die Menge dieser Achsen nennen wir $\mathfrak{A}$. Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(\mathfrak{A}),\ g \longmapsto \sigma_g : A \mapsto g(A).$$

Hier wird also nur geschaut, was mit den Achsen passiert, nicht mit den Halbachsen. Es können nicht drei dieser vier Achsen in einer Ebene liegen. Wären nämlich $A_1, A_2, A_3 \subset E$, so würde eine Dritteldrehung f um A_1 die äquivalenten Achsen $f(A_2)$ und $f(A_3)$ hervorbringen, die aber nicht in der Ebene

E liegen können und die nicht beide gleich A_4 sein können. Das Element $g \in G$ habe die Eigenschaft, dass σ_g die Identität ist, dass also alle Geraden $A \in \mathfrak{A}$ auf sich abgebildet werden. Nach Aufgabe 11.5 muss g die Identität sein. Der Gruppenhomomorphismus ist also nach Lemma 5.12 injektiv und daher muss eine Isomorphie vorliegen. $\square$

Mit einem ähnlichen, aber aufwändigeren Argument kann man zeigen, dass die verbleibende numerische Möglichkeit, also eine Gruppe mit 60 Elementen und mit den Klassenordnungen $2, 3$ und 5 wieder nur von einem Isomorphietyp realisiert wird, nämlich von der alternierenden Gruppe A_5, die zugleich isomorph zur Dodekaedergruppe und zur Ikosaedergruppe ist.

Abbildungsverzeichnis