Universität Osnabrück
Vorlesung *Algebraische Kurven* 2008/2009
Prof. Dr. Holger Brenner
Arbeitsblatt 25

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Bereche die ersten fünf Glieder (bis einschließlich c_4) der eingesetzten Potenzreihe $F(G)$ im Sinne von Definition 24.10.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Bestimme die Singularitäten (mit Multiplizitäten und Tangenten) der durch

$$V((X^2+Y^2)^2-2X(X^2+Y^2)-Y^2)$$

gegebenen *Kardioide*.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Betrachte die Kardioide

$$V((X^2+Y^2)^2-2X(X^2+Y^2)-Y^2)$$

im Punkt $(2,0)$. Bestimme eine formale Parametrisierung (bis zum fünften Term) der Kurve in diesem Punkt in Abhängigkeit von einem Tangentenparameter.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Zeichne mittels eines geeigneten Programms eine der Beispielkurven der Vorlesung sowie die verschiedenen dort berechneten polynomialen Approximationen.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Betrachte den Einheitskreis $X^2+Y^2=1$ im Punkt $(1,0)$. Bestimme Potenzreihen G und $H \in K[[T]]$ mit den Anfangsbedingungen $a_0=1$, $a_1=0$, $b_0=0$, $b_1=1$ und mit $G(T)^2+H(T)^2=1$.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Betrachte die Neilsche Parabel $C=V(Y^3-X^2)$ im Punkt $(1,1)$. Finde eine Parametrisierung der Kurve in diesem Punkt mit Potenzeihen (bis zum fünften Glied) derart, dass eine Potenzreihe davon ein lineares Polynom ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine *formale Laurentreihe* ist eine unendliche Summe der Form

$$F = \sum_{n=k}^{\infty} a_n T^n \text{ mit } a_n \in K \text{ und } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Zeige, dass der Ring der formalen Laurentreihen (mit geeigneten Ringoperationen) isomorph zum Quotientenkörper des Potenzreihenringes $K[[T]]$ ist.

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit der Komplettierung eines lokalen Ringes.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Betrachte zu einem lokalen Ring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ das Diagramm

$$\longrightarrow R/\mathfrak{m}^4 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^3 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow R/\mathfrak{m}\,.$$

Dabei sind die Abbildungen die kanonischen Projektionen $\varphi_n : R/\mathfrak{m}^{n+1} \to R/\mathfrak{m}^n$, die durch die Idealinklusionen $\mathfrak{m}^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}^n$ induziert werden. Eine Folge von Elementen

$$a_n \in R/\mathfrak{m}^n$$

heißt *verträglich*, wenn $\varphi_n(a_{n+1}) = a_n$ gilt für alle n. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller verträglichen Elemente (diesen Ring nennt man die *Komplettierung* von R.) Zeige ferner, dass es einen kanonischen Ringhomomorphismus von R in die Komplettierung gibt.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Sei R ein eindimensionaler lokaler noetherscher kommutativer Ring. Zeige, dass die kanonische Abbildung von R in die Komplettierung von R injektiv ist.

Bemerkung: Die Injektivität gilt für jeden noetherschen lokalen Ring, ist aber schwieriger zu beweisen.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal. Zeigen Sie, dass durch

$$\{x + I^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in R)$$

Umgebungsbasen definiert werden. Zeigen Sie außerdem, dass die auf R induzierte Topologie genau dann hausdorffsch ist, wenn $\bigcap_n I^n = \{0\}$.

Bemerkung: Die Komplettierung eines lokalen Ringes bzgl. seines maximalen Ideals entspricht dann genau der (topologischen) Komplettierung bzgl. dieser Topologie.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[T]$ der Polynomring in einer Variablen. Es sei R die Lokalisierung von $K[T]$ am maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (T)$. Zeige, dass die Komplettierung von R isomorph zum Potenzreihenring $K[[T]]$ ist.