Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Es sei D eine endliche kommutative Gruppe und R ein D-graduierter Ring. Zeige, dass R ganz über der neutralen Stufe R_0 ist.

Aufgabe 12.2. Es sei D eine kommutative Gruppe und R ein D-graduierter normaler Integritätsbereich. Zeige, dass dann auch die neutrale Stufe R_0 normal ist.

Aufgabe 12.3. Wir betrachten die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf dem Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K. Bestimme eine Ganzheitsgleichung für die Variablen X_i über dem Invariantenring.

Aufgabe 12.4. Begründe, dass $K[x, y] \subseteq K[x, y, z]/(xy - z^n)$ endlich ist. Wie sieht es über $K[x, z]$ bzw. $K[y, z]$ aus?

Aufgabe 12.5. Begründe, dass $K[y, z] \subseteq K[x, y, z]/(x^2 + yz^2 + z^{m+1})$ endlich ist. Wie sieht es über $K[x, y]$ bzw. $K[x, z]$ aus?

Aufgabe 12.6. Wir betrachten die natürliche Operation der alternierenden Gruppe A_n auf dem $K[X_1, \ldots, X_n]$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist der Invariantenring $K[X_1, \ldots, X_n]^{A_n}$ faktoriell?

Aufgabe 12.7. Zeige, dass der Veronese-Ring $K[U, V]^{(s)}$ als K-Algebra durch $s+1$ Elemente $Z_0, Z_1, \ldots, Z_s$ erzeugt wird derart, dass sämtliche 2×2-Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_{s-2} & Z_{s-1} \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{s-1} & Z_s \end{pmatrix}$$

Relationen zwischen diesen Erzeugern sind.

Aufgabe 12.8. Sei K ein Körper und $s \in \mathbb{N}_+$. Bestimme den Typ des s-ten Veronese-Ringes $K[U, V]^{(s)}$. Für welche s handelt es sich um einen Gorenstein-Ring?

Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine Gruppe G als Gruppe von Ringautomorphismen operiere, und es sei V ein R-Modul. Eine Operation von G auf V als Gruppe von R-Modulautomorphismen heißt *verträglich* (bezüglich der Operation von G auf R), wenn

$$(f\sigma) \cdot (v\sigma) = (f \cdot v)\sigma$$

für alle $\sigma \in G$, $f \in R$ und $v \in V$ gilt.

AUFGABE 12.9. Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine Gruppe G als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Es sei V ein R-Modul, auf dem G als Gruppe von R-Modulautomorphismen operiere, wobei die beiden Operationen verträglich seien. Zeige, dass der Fixmodul V^G ein R^G-Modul.

AUFGABE 12.10. Sei R ein Hauptidealbereich, der kein Körper sei. Zeige, dass die Krulldimension von R gleich eins ist.

AUFGABE 12.11. Es sei $\varphi\colon R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus zwischen den Integritätsbereichen R und S. Die Krulldimension dieser Ringe sei endlich und gleich. Zeige, dass dann φ ein Isomorphismus ist.

AUFGABE 12.12. Sei R ein kommutativer Ring von endlicher Krulldimension d. Zeige, dass die Krulldimension des Polynomrings $R[X]$ mindestens $d+1$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 12.13. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und R eine kommutative K-Algebra, auf dem eine endliche Gruppe G als Gruppe von K-Algebraautomorphismen operiere. Es sei

$$\chi\colon G \longrightarrow K^\times$$

ein Charakter. Zeige, dass zu jedem $f \in R$ die Summe

$$\sum_{\sigma \in G} \frac{f\sigma}{\chi(\sigma)}$$

zu R^G_χ gehört.

Aufgabe 12.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und R eine integre K-Algebra, auf dem eine endliche Gruppe G als Gruppe von K-Algebraautomorphismen operiere. Es sei

$$\chi\colon G \longrightarrow K^\times$$

ein Charakter und R_χ^G der zugehörige R^G-Modul der Semiinvarianten. Es sei $R_\chi^G \neq 0$ vorausgesetzt. Zeige, dass es einen R^G-Modulhomomorphismus $\varphi\colon R^G \to R_\chi^G$ derart gibt, dass φ nach Nenneraufnahme an einem Element $f \in R^G$, $f \neq 0$, ein Isomorphismus wird.

Aufgabe 12.15. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und $K[U,V]$ sei mit der $\mathbb{Z}/(n)$-Graduierung versehen, bei der U den Grad 1 und V den Grad -1 bekommt. Zeige, dass die Stufen R_d, $d \neq 0$, (als R_0-Moduln) nicht isomorph zu R_0 sind.

Aufgabe 12.16. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R = K[X,Y]$ der Polynomring in zwei Variablen. Zeige, dass R die Krulldimension zwei besitzt.

Abbildungsverzeichnis