Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 54

Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen

Satz 54.1. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein stetiges Vektorfeld auf U, das lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei $J \subseteq I$ offen und es seien

$$v_1, v_2 : J \longrightarrow V$$

Lösungen des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w\,.$$

Dann ist $v_1 = v_2$.

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$M = \{t \in J |\, v_1(t) = v_2(t)\}\,.$$

Wegen $t_0 \in M$ ist diese Menge nicht leer. Zu jedem Punkt $t \in I$ gibt es nach Satz 53.4 eine offene Intervallumgebung $t \in J'$, worauf es zu gegebener Anfangsbedingung $v(t) = v_0$ genau eine Lösung der Differentialgleichung gibt. Wenn $t \in M$ ist, so ist $v_1(t) = v_2(t)$ und daher stimmen v_1 und v_2 in einer offenen Umgebung $t \in J'$ mit der eindeutigen Lösung und damit untereinander überein. Also ist $J' \subseteq M$. Dies bedeutet, dass M eine offene Teilmenge von J ist. Andererseits sind v_1 und v_2 stetig und daher ist nach Aufgabe 54.1 die Menge M auch abgeschlossen in M. Da ein Intervall nach Satz 21.2 zusammenhängend ist, folgt $M = J$. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass ohne die Lipschitz-Bedingung die Lösung eines Anfangswertproblems nicht eindeutig bestimmt ist.

Beispiel 54.2. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$v' = 3v^{2/3} \text{ mit } v(0) = 0$$

zum zeitunabhängigen Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Offensichtlich gibt es die stationäre Lösung

$$h(t) = 0\,,$$

aber auch

$$g(t) = t^3$$

ist eine Lösung, wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt. Aus diesen beiden Lösungen kann man sich noch weitere Lösungen basteln. Seien dazu $a < b$ reelle Zahlen. Dann ist auch

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3 \text{ für } t < a, \\ 0 \text{ für } a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3 \text{ für } t > b, \end{cases}$$

eine Lösung. D.h. es gibt Lösungen, bei denen das Teilchen beliebig lange (im Zeitintervall von a nach b) ruht und danach (und davor) sich bewegt. Sobald sich das Teilchen in einem Punkt $\neq 0$ befindet, ist der Bewegungsablauf lokal eindeutig bestimmt.

Bemerkung 54.3. Zu einem stetigen Vektorfeld

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

kann man sich fragen, ob es ein maximales Definitionsintervall J für die Lösung eines Anfangswertproblems

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(t_0) = w$$

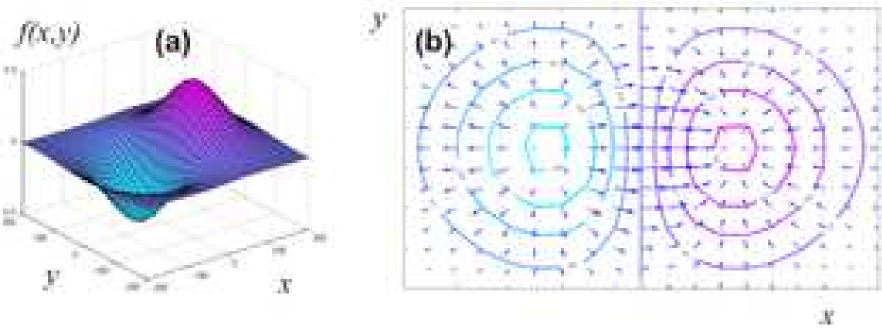
gibt. Dies ist in der Tat der Fall! Man kann nämlich alle Teilmengen

$$J \subseteq I \text{ offen },\ t_0 \in J,\ \text{ es gibt eine Lösung } v_J \text{ auf } J$$

betrachten. Wegen Satz 54.1 stimmen zwei Lösungen v_J und $v_{J'}$ auf dem Durchschnitt $J \cap J'$ überein, und liefern daher eine eindeutige Lösung auf der Vereinigung $J \cup J'$. Daher enthält die Menge der Teilintervalle, auf denen eine Lösung definiert ist, ein maximales Teilintervall J.

Dieses Teilintervall kann kleiner als I sein. Die Grenzen des maximalen Teilintervalls, auf dem eine Lösung definiert ist, heißen auch *Entweichzeiten*.

Gradientenfelder



Definition 54.4. Sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$h : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann nennt man die Abbildung

$$U \longrightarrow V,\ P \longmapsto \operatorname{grad} h(P),$$

das zugehörige *Gradientenfeld*.

Ein Gradientfeld ist also ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Man spricht auch von einem *Potentialfeld*, die Funktion h (manchmal $-h$) heißt dann ein Potential des Vektorfeldes. Wenn h zweimal stetig differenzierbar ist, so genügt nach Lemma 52.10 das zugehörige Gradientenfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Die folgende Aussage zeigt, dass die Lösungskurven der zugehörigen Differentialgleichung senkrecht auf den Fasern von h liegen. Die Fasern beschreiben, wo das Potential (oder die Höhenfunktion) konstant ist, die Lösungen beschreiben den Weg des steilsten Abstiegs. Wenn h bspw. die Höhenfunktion eines Gebirges ist, so gibt das Gradientenfeld in jedem Punkt den steilsten Anstieg an und die Trajektorie einer Lösungskurve beschreibt den Verlauf eines Baches (wir behaupten nicht, dass die Bewegung eines Wassermoleküls im Bach durch diese Differentialgleichung bestimmt ist, sondern lediglich, dass der zurückgelegte Weg, also das Bild der Kurve, mit dem Bild der Lösungskurve übereinstimmt). Der Bach verläuft immer senkrecht zu den Höhenlinien.

Lemma 54.5. *Sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen,*

$$h : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion und

$$U \longrightarrow V,\ P \longmapsto f(P) = \operatorname{grad} h(P),$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi : J \longrightarrow U$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' = f(v)\,.$$

Dann steht $\varphi'(t)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{\varphi(t)}F$ der Faser F von h durch $\varphi(t)$ für alle $t \in J$, für die $\varphi(t)$ reguläre Punkte von h sind.

Beweis. Sei $P = \varphi(t)$ ein regulärer Punkt von h und sei $v \in T_P F$ ein Vektor aus dem Tangentialraum. Dann gilt direkt

$$\langle v, \varphi'(t)\rangle \;=\; \langle v, f(\varphi(t))\rangle \;=\; \langle v, \operatorname{grad} h(P)\rangle \;=\; (Dh)_P(v) \;=\; 0.$$

$\square$

Beispiel 54.6. Wir betrachten die *Produktabbildung*

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy.$$

Das zugehörige Gradientenfeld ist

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = (y,x).$$

Die Fasern von h sind das Achsenkreuz (die Faser über 0) und die durch $xy = c$ gegebenen Hyperbeln. Die Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

sind von der Form

$$\varphi(t) \;=\; (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \;=\; (a \cosh t + b \sinh t\,, a \sinh t + b \cosh t\,)$$

mit beliebigen $a, b \in \mathbb{R}$, wie man direkt nachrechnet. Dabei ist $\varphi(0) = (a,b)$. Für $a = b = 0$ ist dies die stationäre Lösung im Nullpunkt, in dem die Produktabblidung nicht regulär ist. Bei $a = b = 1$ ist $\varphi(t) = (e^t, e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die obere Halbdiagonale (ohne den Nullpunkt), bei $a = b = -1$ ist $\varphi(t) = (-e^t, -e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die untere Halbdiagonale, bei $a = 1$ und $b = -1$ ist $\varphi(t) = (e^{-t}, -e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die untere Hälfte der Nebendiagonalen, bei $a = -1$ und $b = 1$ ist $\varphi(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die obere Hälfte der Nebendiagonalen. Ansonsten kann man die Lösungskurven realisieren als

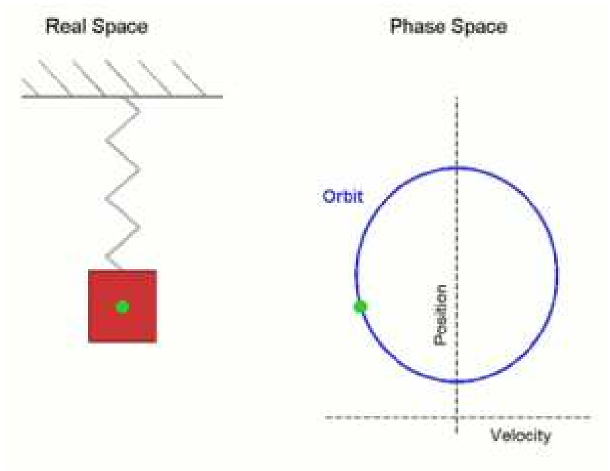
$$(a \cosh t\,, a \sinh t\,)$$

(Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der $x-$Achse im Punkt $(a, 0)$), und als

$$(b \sinh t\,, b \cosh t\,)$$

(Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der $y-$Achse im Punkt $(0, b)$). Die Lösungen erfüllen die Gleichung $x^2(t) - y^2(t) = a^2$ bzw. $x^2(t) - y^2(t) = b^2$.

Differentialgleichungen höherer Ordnung



Viele physikalische Bewegungsprozesse sind nicht (wie im Fall eines Löwenzahnfallschirmchens, siehe Vorlesung 37) dadurch determiniert, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt die Bewegungsrichtung (also die gerichtete Geschwindigkeit) vorgegeben wird, sondern dadurch, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt eine Kraft auf ein Teilchen wirkt, die dieses beschleunigt. In diesem Fall kann die Bewegung also nicht durch die erste Ableitung (Geschwindigkeit) modelliert werden, sondern durch die zweite Ableitung (Beschleunigung). Typische Beispiele hierzu sind die durch Gravitation oder Federkraft hervorgerufenen Bewegungen.

Definition 54.7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$g : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man den Ausdruck

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung der Ordnung* n.

Unter einer *Lösung einer Differentialgleichung höherer Ordnung* versteht man eine n-mal differenzierbare Funktion

$$y : J \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t)$$

(wobei $J \subseteq I$ ein offenes Teilintervall ist) derart, dass

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle $t \in J$ gilt.

Differentialgleichungen beliebiger Ordnung können unter Inkaufnahme von neuen Variablen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückgeführt werden.

Lemma 54.8. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$g : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist die Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

über die Beziehung

$$v_i = y^{(i)}$$

äquivalent zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ g(t, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \end{pmatrix} .$$

Beweis. Wenn

$$y : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

ist, so sind alle Funktionen $v_i = y^{(i)}$ für $i = 0, \ldots, n-1$ differenzierbar, und es gilt $v_i' = v_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, n-2$ nach Definition und

$$\begin{aligned} v_{n-1}'(t) &= (y^{(n-1)})'(t) \\ &= y^{(n)}(t) \\ &= g(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \\ &= g(t, v_0(t), v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt

$$v : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \, (t, v_0, \ldots, v_{n-1}) \longmapsto f(t, v_0, \ldots, v_{n-1}))$$
$$= (v_1, \ldots, v_{n-1}, g(t, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}))$$

ist, so ergibt sich sukzessive aus den ersten $n-1$ Gleichungen, dass $y = v_0$ n-mal differenzierbar ist, und die letzte Gleichung des Differentialgleichungssystems besagt gerade

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \, .$$

□

Mit dieser Umformung ist auch klar, wie sinnvolle Anfangsbedingungen für eine Differentialgleichung höherer Ordnung aussehen. Man muss nicht nur einen Startwert $y(t_0) = w_0$, sondern auch die höheren Ableitungen $y'(t_0) = w_1$, $y''(t_0) = w_2$, usw. festlegen.

Abbildungsverzeichnis