Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 1

Aufgabe 1.1. Finde möglichst einfache aussagenlogische Ausdrücke, die die folgenden tabellarisch dargestellten Wahrheitsfunktionen ergeben.

p	q	?
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

p	q	?
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	f

p	q	?
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Aufgabe 1.2. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $p \wedge q \rightarrow p$,
(2) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$,
(3) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,
(4) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,
(5) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$,
(6) $(p \wedge p) \leftrightarrow p$.

Aufgabe 1.3. Man beweise mittels Wahrheitstabellen die *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$(p \wedge \neg(q \vee r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r)$$

und

$$(p \wedge \neg(q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$$

Tautologien sind.

Aufgabe 1.4. Man bringe die besprochenen Aussageformen in zwei Aussagenvariablen in disjunktive Normalform.

Aufgabe 1.5. Man bringe die Aussage

$$((p \vee (r \rightarrow q)) \wedge (q \rightarrow p)) \vee (((p \wedge \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg p)) \wedge (r \rightarrow (p \vee \neg q)))$$

in disjunktive Normalform.

Aufgabe 1.6. Man gebe möglichst viele Beispiele für aussagenlogische Kontradiktionen an.

Aufgabe 1.7. Zeige, dass in einer aussagenlogischen Tautologie (und ebenso in einer aussagenlogischen Kontradiktion) mindestens eine Aussagenvariable mehrfach vorkommen muss.

Tipp: Ein Beweis für diese Aussage erfordert, dass man eine *Induktion über den Aufbau der logischen Sprache* durchführt, d.h., man überlegt sich, wie die Aussagen der Sprache aus kleineren Teilaussagen zusammensetzt werden können, und beweist die Aussage für zunehmend komplexere Aussagen.

Aufgabe 1.8. Man formalisiere die folgenden Aussagen, indem man geeignete Prädikate erklärt. Man gebe die Negation der Aussagen (formal und umgangssprachlich) an.

(1) Alle Vögel sind schon da.
(2) Alle Wege führen nach Rom.
(3) Faulheit ist aller Laster Anfang.
(4) Alle Menschen werden Brüder, wo dein sanfter Flügel weilt.
(5) Wem der große Wurf gelungen, eines Freundes Freund zu sein, wer ein holdes Weib errungen, mische seinen Jubel ein!
(6) Freude trinken alle Wesen an den Brüsten der Natur.
(7) Alle Macht geht vom Volk aus.
(8) Alle Achtung.
(9) Alle Neune.

Aufgabe 1.9. Schreibe die folgenden Aussagen mit Quantoren:

(1) Für jede natürliche Zahl gibt es eine größere Zahl.

(2) Für jede natürliche Zahl gibt es eine kleinere Zahl.
(3) Es gibt eine natürliche Zahl, die größer oder gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.
(4) Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner oder gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.

Welche sind wahr, welche falsch?

Aufgabe 1.10. Formuliere die folgenden Beziehungen (ein- oder mehrstellige Prädikate) innerhalb der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ allein mittels Gleichheit, Addition, Multiplikation und unter der Verwendung von Quantoren.

(1) $x \geq y$.
(2) $x > y$.
(3) x teilt y.
(4) x teilt nicht y.
(5) x ist eine Primzahl.
(6) x ist keine Primzahl.
(7) x ist das Produkt von genau zwei verschiedenen Primzahlen.
(8) x wird von einer Primzahl geteilt.

In der folgenden Aufgabe geht es nicht um die Wahrheit der Aussagen, sondern nur um die quantorenlogische Formulierung. Man darf und soll sich natürlich trotzdem Gedanken über die Gültigkeit machen.

Aufgabe 1.11. Formuliere die folgenden Aussagen über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ allein mittels Gleichheit, Addition, Multiplikation und unter Verwendung von Quantoren.

(1) $5 \geq 3$.
(2) $5 > 3$.
(3) $5 \leq 3$.
(4) 7 ist eine Primzahl.
(5) 8 ist eine Primzahl.
(6) 8 ist keine Primzahl.
(7) Jede natürliche Zahl besitzt mindestens einen Primfaktor.
(8) Jede natürliche Zahl größer gleich 2 besitzt mindestens einen Primfaktor.
(9) Wenn eine Primzahl ein Produkt teilt, so teilt sie auch mindestens einen der Faktoren.
(10) Es gibt Zahlen, die ein Produkt teilen, obwohl sie keinen der Faktoren teilen.