Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 28

Die Fakultätsfunktion

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Dabei gilt die rekursive Beziehung $n! = n \cdot ((n-1)!)$. Gibt es eine Möglichkeit, diese für die natürlichen Zahlen definierte Funktion auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ durch eine differenzierbare Funktion f fortzusetzen? Ist es sogar möglich, dass dabei die Beziehung $f(x) = xf(x-1)$ für jedes x gilt? Wir werden mit Hilfe von uneigentlichen Integralen zeigen, dass dies in der Tat möglich ist.

Beispiel 28.1. Sei $x > -1$. Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto t^x e^{-t}.$$

Wir behaupten, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

existiert. Für den rechten Rand (also ∞) betrachten wir eine natürliche Zahl $n \geq x$. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Polynomfunktion, gibt es ein $a \in \mathbb{R}_+$ derart, dass $t^n e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$ gilt für alle $t \geq a$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x e^{-t}\, dt &\leq \int_a^b t^n e^{-t}\, dt \\ &= \int_a^b t^n e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\, dt \\ &\leq \int_a^b e^{-\frac{t}{2}}\, dt \\ &= 2\left(e^{-\frac{a}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}\right) \leq 2e^{-\frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ wächst das linke Integral und ist durch $2e^{-\frac{a}{2}}$ beschränkt, so dass der Grenzwert existiert. Für das Verhalten am linken Rand (das nur bei $-1 < x \leq 0$ problematisch ist) müssen wir wegen $e^{-t} \leq 1$ nach Lemma 27.4 nur $\int_0^1 t^x\, dt$ betrachten. Eine Stammfunktion davon ist $\frac{1}{x+1} t^{x+1}$, deren Exponent positiv ist, so dass der Limes für $t \to 0$ existiert.

Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

existiert also für $x \in \mathbb{R},\ x > -1$. Dies ist der Ausgangspunkt für die Definition der Fakultätsfunktion.

DEFINITION 28.2. Für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, heißt die Funktion

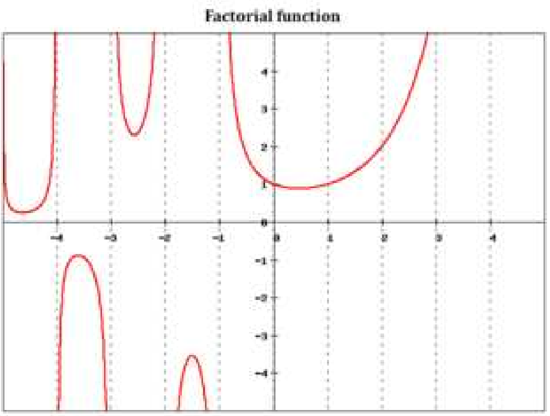
$$x \longmapsto \operatorname{Fak}(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

die *Fakultätsfunktion*.

Die für $x > 0$ durch

$$\Gamma(x) := \operatorname{Fak}(x-1) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

definierte Funktion heißt *Gammafunktion*, mit der häufiger gearbeitet wird. Mit der Fakultätsfunktion werden aber die Formeln etwas schöner und insbesondere wird der Zusammenhang zur Fakultät, der in der folgenden Aussage aufgezeigt wird, deutlicher.



SATZ 28.3. *Die Fakultätsfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $\operatorname{Fak}(x) = x \cdot \operatorname{Fak}(x-1)$ *für* $x > 0$.
(2) *Es ist* $\operatorname{Fak}(0) = 1$.
(3) *Es ist* $\operatorname{Fak}(n) = n!$ *für natürliche Zahlen* $n \in \mathbb{N}$.
(4) *Es ist* $\operatorname{Fak}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Beweis. (1) Mittels partieller Integration ergibt sich (für reelle Zahlen $b \geq a > 0$ bei fixiertem $x > 0$)

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x e^{-t}\, dt &= -t^x e^{-t}|_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t}\, dt \\ &= -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x \cdot \int_a^b t^{x-1} e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ geht $b^x e^{-b} \to 0$ und für $a \to 0$ geht $a^x e^{-a} \to 0$ (da x positiv ist). Wendet man auf beide Seiten diese Grenzwertprozesse an, so erhält man $\mathrm{Fak}\,(x) = x \cdot \mathrm{Fak}\,(x-1)$. (2). Es ist

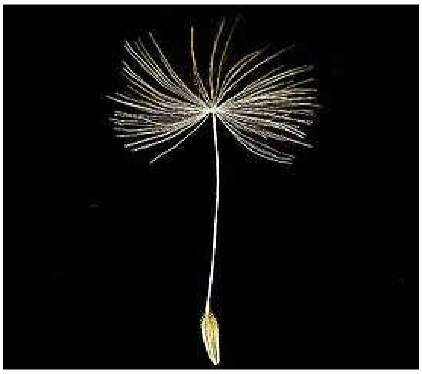
$$\mathrm{Fak}\,(0) \;=\; \int_0^\infty e^{-t}\,dt \;=\; -e^{-t}|_0^\infty \;=\; 1.$$

(3) folgt aus (1) und (2) durch Induktion. (4). Es ist

$$\mathrm{Fak}\left(-\frac{1}{2}\right) \;=\; \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt \;=\; 2\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds \;=\; \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\,ds \;=\; \sqrt{\pi}.$$

Dies ergibt sich mit der Substitution $t = s^2$ und dem sogenannten Fehlerintegral. $\square$

Gewöhnliche Differentialgleichungen



Welche Bewegung vollzieht ein Löwenzahnfallschirmchen? Das Fallschirmchen lässt sich zu jedem Zeitpunkt von dem Wind tragen, der an der Stelle herrscht, wo es sich gerade befindet. Der Wind, seine Stärke und seine Richtung, hängt sowohl von der Zeit als auch vom Ort ab. Das bedeutet, dass hier ein gewisser „Rückkopplungsprozess“ vorliegt: Die bisherige Bewegung (also die Vergangenheit) bestimmt, wo sich das Fallschirmchen befindet und damit auch, welcher Wind auf es einwirkt und damit den weiteren Bewegungsablauf. Solche Bewegungsprozesse werden durch Differentialgleichungen beschrieben.

Differentialgleichungen sind ein fundamentaler Bestandteil der Mathematik und der Naturwissenschaften. Sie drücken eine Beziehung zwischen einer abhängigen Größe und der Änderung dieser Größe aus. Viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur wie Bewegungsprozesse, Ablauf von chemischen Reaktionen, Wachstumsverhalten von Populationen werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Hier besprechen wir nur solche Differentialgleichungen, die durch Integration gelöst werden können.

Definition 28.4. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(t, y)$$

die (gewöhnliche) *Differentialgleichung* zu f (oder zum *Vektorfeld* oder zum *Richtungsfeld* f).

Dabei ist $y' = f(t, y)$ erstmal nur ein formaler Ausdruck, dem wir aber sofort eine inhaltliche Interpretation geben. Das y soll eine Funktion repräsentieren und y' ihre Ableitung. Dies wird präzisiert durch den Begriff der *Lösung einer Differentialgleichung*.

Definition 28.5. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem (mehrpunktigen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
(2) Die Funktion y ist differenzierbar.
(3) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Differentialgleichungen beschreiben häufig physikalische Prozesse, insbesondere Bewegungsprozesse. Daran soll auch die Notation erinnern, es steht t für die Zeit und y für den Ort. Dabei ist hier der Ort eindimensional, d.h. die Bewegung findet nur auf einer Geraden statt. Den Wert $f(t, y)$ sollte man sich als eine zu einem Zeit- und Ortspunkt vorgegebene Richtung auf der Ortsgeraden vorstellen. Eine Lösung ist dann eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

die differenzierbar ist und deren Ableitung, vorgestellt als Momentangeschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt t mit dem durch $f(t, y(t))$ gegebenen Richtungsvektor übereinstimmt. Später werden wir auch Bewegungen betrachten, die sich in der Ebene oder im Raum abspielen, und die durch ein entsprechendes Richtungsfeld gesteuert werden.

Beispiel 28.6. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = y$, in der t gar nicht explizit vorkommt (solche Differentialgleichungen nennt man zeitunabhängig). Durch diese Differentialgleichung werden Wachstumsprozesse beschrieben, bei denen beispielsweise der Zuwachs gleich der Bevölkerung ist. Gesucht ist also nach einer Funktion $y(t)$, die differenzierbar ist und die mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt. Wir wissen bereits, dass die Exponentialfunktion $y(t) = e^t$ diese Eigenschaft besitzt. Ebenso ist jede Funktion ce^t mit einem festen $c \in \mathbb{R}$ eine Lösungsfunktion.

Wenn der Zuwachs zur Bevölkerung proportional ist, so führt dies zur Differentialgleichung $y' = ay$ mit einer festen Zahl a. In diesem Fall sind $y(t) = ce^{at}$ die Lösungen.

Beispiel 28.7. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = yt$. Gesucht ist also nach einer Funktion $y(t)$, die differenzierbar ist und deren Ableitung die Gestalt $y(t)t$ besitzt. Hier ist nicht unmittelbar klar, wie eine Lösung aussieht und wie man sie findet. Durch Probieren findet man die Lösung $y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$.

Definition 28.8. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit der *Anfangsbedingung* $y(t_0) = y_0$.

Definition 28.9. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0\,,$$

wenn y eine Lösung der Differentialgleichung ist und wenn zusätzlich

$$y(t_0) = y_0$$

gilt.

Es gibt kein allgemeines Verfahren eine Differentialgleichung bzw. ein Anfangswertproblem explizit zu lösen. Die Lösbarkeit hängt wesentlich von der gegebenen Funktion $f(t, y)$ ab.

Das eine Differentialgleichung beschreibende Vektorfeld $f(t, y)$ hängt im Allgemeinen von beiden Variablen t und y ab. Einfache, aber keineswegs triviale Spezialfälle von Differentialgleichungen liegen vor, wenn das Vektorfeld nur von einer der beiden Variablen abhängt.

Definition 28.10. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *ortsunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von y abhängt, wenn also $f(t, y) = g(t)$ gilt mit einer Funktion g in der einen Variablen t.

Eine ortsunabhängige gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

zu einer stetigen Funktion g ist nichts anderes als das Problem, eine Stammfunktion $G(t)$ von g zu finden; eine Lösung y der Differentialgleichung ist ja genau durch die Bedingung ausgezeichnet, dass $y'(t) = g(t)$ ist. Da eine Stammfunktion nur bis auf die Integrationskonstante bestimmt ist, besitzt ein ortsunabhängiges Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung.

Beispiel 28.11. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{t^2 - 1} \text{ mit der Anfangsbedingung } y(5) = 3\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{t^2-1}$ besitzt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1},$$

daher sind die Stammfunktionen (wir beschränken uns auf $t > 1$) gleich

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t+1) + c\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(5) = 3$ führt auf

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 4 - \frac{1}{2} \cdot \ln 6 + c = 3\,,$$

also ist

$$c = 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6$$

und die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t+1) + 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6\,.$$

Definition 28.12. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *zeitunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ gilt mit einer Funktion h in der einen Variablen y.

Bei einer zeitunabhängigen Differentialgleichung hängt nur das zugrunde liegende Vektorfeld nicht von der Zeit ab, die Lösungskurven sind hingegen im Allgemeinen zeitabhängig.

Abbildungsverzeichnis