

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 51

Der Satz über die Umkehrabbildung

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x_0) \neq 0$ in einem Punkt $x_0 \in I$. Nehmen wir an es gelte $f'(x_0) > 0$. Da die Ableitung stetig ist, gibt es auch ein offenes Intervall $J =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subseteq I$ derart, dass $f'(x) > 0$ ist für alle $x \in J$. Aufgrund von Satz 20.7 (2) ist somit f auf J streng wachsend. Daher ist insbesondere f auf J injektiv. Das Bild $J' = f(J)$ ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall und daher liegt eine Bijektion

$$f|_J: J \longrightarrow J'$$

vor. Nach Satz 19.9 ist die Umkehrfunktion

$$g: J' \longrightarrow J$$

ebenfalls differenzierbar, und ihre Ableitung in $y \in J'$ ist $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Daher ist die Umkehrfunktion auf J' auch stetig differenzierbar. Eine ähnliche Argumentation ist durchführbar, wenn $f'(x_0) < 0$ ist. Insgesamt bedeutet dies, dass aus dem Nichtverschwinden der Ableitung in einem Punkt folgt, dass die Funktion sich in einer kleinen offenen Umgebung des Punktes bijektiv verhält mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung.

Der Satz über die (lokale) Umkehrabbildung verallgemeinert diese Beobachtung auf höhere Dimensionen. Er gehört zu den wichtigsten Sätzen der mehrdimensionalen Analysis und besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung φ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen, für die das totale Differential in einem Punkt bijektiv ist (was voraussetzt, dass die Dimension des Definitionsraum mit der Dimension des Zielraums übereinstimmt), die Abbildung selbst auf geeigneten kleinen offenen Umgebungen von P und von $\varphi(P)$ eine Bijektion ist. D.h. die Abbildung verhält sich *lokal* so wie das totale Differential.

Der folgende Satz heißt *Satz über die Umkehrbarkeit*. Wir verzichten auf den recht aufwändigen Beweis.

SATZ 51.1. *Es seien V_1 und V_2 euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V_1$ offen und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt derart, dass das totale Differential

$$(D\varphi)_P$$

bijektiv ist. Dann gibt es eine offene Menge $U_1 \subseteq G$ und eine offene Menge $U_2 \subseteq V_2$ mit $P \in U_1$ und mit $\varphi(P) \in U_2$ derart, dass φ eine Bijektion

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

induziert, und dass die Umkehrabbildung

$$(\varphi|_{U_1})^{-1}: U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Dabei ergibt sich das totale Differential der Umkehrabbildung in einem Punkt $\varphi(P)$ aufgrund der Kettenregel einfach als Umkehrabbildung des totalen Differentials in P .

DEFINITION 51.2. Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, sei $P \in G$ und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine in P differenzierbare Abbildung. Dann heißt P ein *regulärer Punkt* von φ , wenn

$$\text{rang}(D\varphi)_P = \min(\dim(V), \dim(W))$$

ist. Andernfalls heißt P ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

BEMERKUNG 51.3. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi: G \rightarrow W$ ist genau dann regulär in einem Punkt $P \in G$, wenn das totale Differential $(D\varphi)_P$ den maximal möglichen Rang besitzt. Der Rang ist nach Lemma 11.2 und nach Lemma 11.3 gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang einer beschreibenden Matrix. Daher ist der Rang maximal gleich der Anzahl der Zeilen und maximal gleich der Anzahl der Spalten, also maximal gleich dem Minimum der beiden Dimensionen.

Bei $\dim(W) = 1$ ist P ein regulärer Punkt genau dann, wenn $(D\varphi)_P$ nicht die Nullabbildung ist. Daher stimmt diese Definition von regulär mit Definition überein. Bei $\dim(V) = 1$ bedeutet die Regularität wiederum, dass $(D\varphi)_P \neq 0$ ist. Generell bedeutet bei $\dim(V) \leq \dim(W)$ die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ injektiv ist, und bei $\dim(V) \geq \dim(W)$ bedeutet die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ surjektiv ist. Insbesondere bedeutet bei $\dim(V) = \dim(W)$ die Regularität in P , dass das totale Differential bijektiv ist und dass daher die Voraussetzung im Satz über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt ist.

BEISPIEL 51.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y, x + xy).$$

Diese Abbildung ist differenzierbar und die Jacobi-Matrix in einem Punkt $P = (x, y)$ ist

$$\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1+y & x \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$2x^2 + 1 + y,$$

so dass die Bedingung

$$y \neq -2x^2 - 1$$

die regulären Punkte der Abbildung charakterisiert. Im Nullpunkt $(0, 0)$ liegt beispielsweise ein regulärer Punkt vor, so dass dort aufgrund des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit lokal eine Bijektion vorliegt, d.h. es gibt offene Umgebungen U_1 und U_2 von $(0, 0)$ derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist (mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung).

Wie groß kann dabei U_1 gewählt werden? Wir beschränken uns auf offene Ballumgebungen $U(0, r)$. Bei $r > 1$ enthält eine solche Kreisscheibe zwei Punkte der Art

$$(\pm x, -1).$$

Diese werden unter φ auf

$$\varphi(\pm x, -1) = (x^2 - (-1), x + x(-1)) = (x^2 + 1, 0)$$

abgebildet, also auf den gleichen Punkt. Daher ist die Einschränkung der Abbildung auf eine solche Kreisscheibe nicht injektiv, und auf einer solchen Menge kann es keine Umkehrabbildung geben.

Betrachten wir hingegen $U_1 = U(0, r)$ mit $r \leq 1$ und $U_2 := \varphi(U_1)$. Da U_1 keine kritischen Punkte enthält, ist nach Aufgabe 51.14 das Bild U_2 offen. Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{U_1}: U_1 \rightarrow U_2$ ist nach Definition von U_2 surjektiv, so dass nur die Injektivität zu untersuchen ist.

Das Gleichungssystem

$$x^2 - y = u \text{ und } x + xy = v$$

führt auf

$$y = x^2 - u$$

und auf

$$x(1 + x^2 - u) = x^3 + (1 - u)x = v.$$

Seien (x, y) und (\tilde{x}, \tilde{y}) aus $U((0, 0), 1)$ mit

$$\varphi(x, y) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

gegeben. Dann ist

$$x^3 + (1 - u)x = v = \tilde{x}^3 + (1 - u)\tilde{x}$$

und somit

$$0 = x^3 - \tilde{x}^3 + (1 - u)(x - \tilde{x}) = (x - \tilde{x})(x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u).$$

Bei $x \neq \tilde{x}$ muss also

$$x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u = 0$$

sein. Dies bedeutet $y = x^2 - u = x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1$ und ebenso $\tilde{y} = x\tilde{x} + x^2 + 1$.
Wegen

$$x(y + 1) = v$$

und $y + 1 > 0$ müssen x und v das gleiche Vorzeichen besitzen. Daher müssen auch x und \tilde{x} das gleiche Vorzeichen besitzen. Daraus folgt aber

$$y = x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 \geq 1,$$

so dass es in der offenen Kreisumgebung mit Radius 1 keine zwei verschiedenen Urbilder geben kann.¹

Diffeomorphismen

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit gibt Anlass zu folgender Definition.

DEFINITION 51.5. Es seien V_1 und V_2 euklidische Vektorräume und $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen. Eine Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt *C^k -Diffeomorphismus*, wenn φ bijektiv und k -mal stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls k -mal stetig differenzierbar ist.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit besagt also, dass eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarem totalen Differential lokal (!) ein C^1 -Diffeomorphismus ist (es gibt auch C^k -Versionen von diesem Satz). Zwei offene Mengen U_1 und U_2 heißen *C^k -diffeomorph*, wenn es einen C^k -Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt.

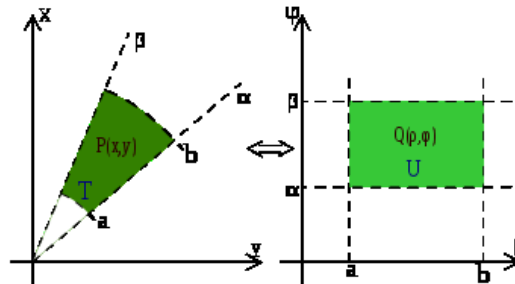
Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit macht keine Aussage über die Größe der offenen Mengen, auf denen ein Diffeomorphismus vorliegt. Abbildungen, die auf großen und übersichtlichen Teilmengen umkehrbar sind, werden durch Koordinatensysteme bereit gestellt. Wir besprechen hier Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

¹Man kann auch folgendermaßen argumentieren: Die Ableitung von $x^3 + (1 - u)x$ nach x ist $3x^2 + (1 - u) = 3x^2 + 1 - (x^2 - y) = 2x^2 + 1 + y$. Wegen $|y| < 1$ ist dies positiv. Somit ist $x^3 + (1 - u)x$ streng wachsend in x nach Satz 20.7. Daher gibt es zu einem vorgegebenen Punkt $(u, v) \in U_2$ nur ein x , das die Bedingung

$$x^3 + (1 - u)x = v$$

erfüllt. Wegen $y = x^2 - u$ ist auch die zweite Komponente y eindeutig bestimmt.

Wir haben gelegentlich für die reelle Ebene (bzw. die komplexen Zahlen) Polarkoordinaten verwendet. Hier besprechen wir Polarkoordinaten in Hinblick auf lokale Umkehrbarkeit.



BEISPIEL 51.6. Die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha),$$

heißt *Polarkoordinatenauswertung*. Sie ordnet einem Radius und einem Winkel denjenigen Punkt der Ebene (in kartesischen Koordinaten) zu, zu dem man gelangt, wenn man in Richtung des Winkels (gemessen von der x -Achse aus gegen den Uhrzeigersinn) die Strecke r zurücklegt. Sie ist in jedem Punkt (r, α) stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da die Abbildung im zweiten Argument, also im Winkel α , periodisch mit der Periode 2π ist. Bei $r = 0$ ist - unabhängig von α - das Bild gleich $(0, 0)$. Ferner ist $\varphi(-r, \alpha + \pi) = \varphi(r, \alpha)$. Die Abbildung kann also nicht global invertierbar sein.

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist

$$r(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r.$$

Bei $r \neq 0$ liegt also nach Satz 11.11 ein bijektives totales Differential vor. Nach dem Satz über die lokale Umkehrabbildung gibt es zu jedem Punkt (r, α) mit $r \neq 0$ eine offene Umgebung $(r, \alpha) \in U_1$ und eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2 = \varphi(U_1).$$

Bei $r > 0$ kann man beispielsweise als offene Umgebung das offene Rechteck

$$U_1 =]r - \delta, r + \delta[\times]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$$

mit $r > \delta > 0$ und mit $\pi > \epsilon > 0$ wählen. Das Bild davon, also U_2 , ist der Schnitt des (offenen) Kreisringes zu den Radien $r - \delta$ und $r + \delta$ und dem (offenen) Kreissektor, der durch die beiden Winkel $\alpha - \epsilon$ und $\alpha + \epsilon$ begrenzt ist.

Man kann diese Abbildung zu einer bijektiven Abbildung, und zwar zu einem Diffeomorphismus, auf großen offenen Mengen einschränken, beispielsweise zu

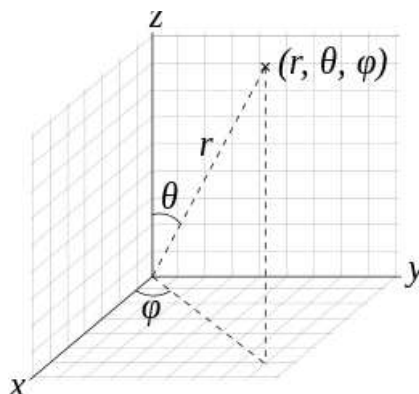
$$\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}, (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Die Bijektivität folgt dabei aus den grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, siehe insbesondere Satz 21.8. Wenn man das offene Intervall $]-\pi, \pi[$ durch das halboffene Intervall $]-\pi, \pi]$ ersetzt, so bekommt man eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi]$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Man kann aber nicht von einem Diffeomorphismus sprechen, da dies nur für offene Mengen definiert ist. Die Umkehrabbildung ist übrigens noch nicht einmal stetig.

BEISPIEL 51.7. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$$

(bzw. die Einschränkung davon auf Teilmengen wie $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$) nennt man *Kugelkoordinatenauswertung*. Diese Abbildung bildet die *Kugelkoordinaten* (r, θ, φ) auf die zugehörigen kartesischen Koordinaten (x, y, z) ab.



Die Bedeutung der Kugelkoordinaten sind folgendermaßen: r ist der Abstand von (x, y, z) zum Nullpunkt. Bei $r = 1$ definieren die beiden Winkel φ und θ einen Punkt auf der Einheitskugel, und zwar bestimmt φ einen Punkt auf dem Einheitskreis in der $x - y$ -Ebene (auf dem Äquator) und θ bestimmt einen Punkt auf dem zugehörigen Halbkreis (der durch den Äquatorpunkt und Nord- und Südpol festgelegt ist), wobei der Winkel zum Nordpol gemessen wird. Für $(r = 1)$ und einen festen Winkel θ parametrisiert φ einen *Breitenkreis*, wobei $\theta = \frac{\pi}{2}$ den Äquator beschreibt. Bei einem festen Winkel φ hingegen parametrisiert θ den oben angesprochenen Halbkreis, einen *Längenkreis*. In der Geographie herrschen übrigens etwas andere Konventionen, man wählt den zweiten Winkel aus $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (statt $+$ und $-$ spricht man von nördlicher und südlicher Breite) und nimmt $-\sin \theta$.

Die Jacobi-Matrix der Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

und die Determinante davon ist

$$r^2 \sin \theta .$$

D.h. bei $r \neq 0$ und $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$ ist das totale Differential invertierbar und daher liegt nach Satz 51.1 ein lokaler Diffeomorphismus vor. Die inhaltliche Interpretation der Abbildung zeigt, dass hier überhaupt ein Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}_+ \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ vorliegt.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Passaggio in coordinate polari.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	5
Quelle = 3D Spherical.svg , Autor = Benutzer Andeggs auf Commons, Lizenz = PD	6